

# La analogía eléctrica en problemas de fotoelasticidad

Por el Ingeniero  
**RAUL SANDOVAL LANDAZURI**  
 de la Oficina de Ingeniería Experimental de la C. N. I.

EN la Oficina de Ingeniería Experimental del Departamento de Proyectos de la Comisión Nacional de Irrigación se está llevando a cabo el Estudio Fotoelástico de la distribución de esfuerzos en presas del tipo de machones de cabeza redonda, estudio que ha implicado numerosas experiencias y que ha servido para ensayar nuevos métodos y perfeccionar los procedimientos de experimentación.

Como es bien sabido, las experiencias ópticas permiten conocer, en problemas de esfuerzo o deformación plana, los valores de  $(P-Q)$  (diferencia de esfuerzos principales) y de  $\alpha$  (inclinación de un esfuerzo principal con respecto a un eje) en modelo construido y cargado semejantemente al prototipo cuyo estado de esfuerzo se pretende analizar.

Los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  en un punto cualquiera de la estructura están relacionados con los esfuerzos principales por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P+Q}{2} + \frac{P-Q}{2} \cos 2\alpha \\ \sigma_y &= \frac{P+Q}{2} - \frac{P-Q}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_{xy} &= \frac{P-Q}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

En donde P y Q son los esfuerzos principales

- $\sigma_x$  = Esfuerzo en la dirección del eje OX.
- $\sigma_y$  = Esfuerzo en la dirección del eje OY.
- $\tau_{xy}$  = Esfuerzo rasante.
- $\alpha$  = Angulo que forma el esfuerzo P con el eje OX.

Entonces para conocer el estado de esfuerzo necesitamos encontrar la distribución de  $(P+Q)$  en el modelo, bien sea por cálculo numérico o por medios experimentales.

Se demuestra que si el material es homogé-

neo isotrópico y sigue la ley de Hooke la función  $(P+Q)$  es una función armónica, es decir, que satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\delta^2}{\delta x^2} (P+Q) + \frac{\delta^2}{\delta y^2} (P+Q) = \nabla^2 (P+Q) = 0$$

Demostración:

En el estudio de esfuerzo o deformación plana las ecuaciones de equilibrio son de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} + X &= 0 \\ \frac{\delta \sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I)$$

donde:

- $\sigma_x$  = Esfuerzo normal según el eje OX.
- $\sigma_y$  = Esfuerzo normal según el eje OY.
- X = Componente de las fuerzas de cuerpo de la dirección del eje OX.
- Y = Componente de las fuerzas de cuerpo de la dirección del eje OY.
- $\tau_{xy}$  = Esfuerzo rasante.

Si llamamos U y V a las componentes de los desalojamientos de cada punto se tendrá:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\delta U}{\delta x} \text{ Deformación en la dirección OX.} \\ \epsilon_y &= \frac{\delta V}{\delta y} \text{ Deformación en la dirección OY.} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\delta V}{\delta x} + \frac{\delta U}{\delta y} \text{ Deformación angular} \end{aligned}$$

La relación entre  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  se obtiene fácilmente derivando en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \epsilon_x}{\delta y^2} &= \frac{\delta^3 U}{\delta x \delta y^2} \\ \frac{\delta^2 \epsilon_y}{\delta x^2} &= \frac{\delta^3 V}{\delta y \delta x^2} \\ \text{y} \quad \frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y} &= \frac{\delta^3 U}{\delta x \delta y^2} + \frac{\delta^3 V}{\delta y \delta x^2} \end{aligned}$$

Se ve que:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (II)$$

Esta ecuación expresa la *CONDICION DE COMPATIBILIDAD*.

Por medio de la ley de Hooke podemos expresar esta condición en función de los esfuerzos. Se tiene: (para estado de esfuerzo plano).

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}$$

Substituyendo en (II):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) &= \\ = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \tau_{xy} &\dots\dots\dots (II') \end{aligned}$$

Derivando la primera de las ecuaciones I con respecto a X, la segunda con respecto a Y y sumando:

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \dots\dots\dots (I')$$

(sin considerar las fuerzas de cuerpo)

Substituyendo esta expresión en II' se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= \\ = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \dots\dots\dots (III) \end{aligned}$$

Si expresamos  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  en función de los esfuerzos principales P y Q tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P+Q}{2} + \frac{P-Q}{2} \cos 2\alpha \\ \sigma_y &= \frac{P+Q}{2} - \frac{P-Q}{2} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (IV)$$

Sumando  $\sigma_x + \sigma_y = P + Q$  por lo tanto, si no se consideran las fuerzas de cuerpo, la suma de los esfuerzos principales satisface la ecuación de Laplace:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (P+Q) = \nabla^2 (P+Q) = 0 \dots\dots\dots (V)$$

La resolución analítica de esta ecuación cuando se conocen los valores de la función en las fronteras es conocida con el nombre de "Problema de Dirichlet". En nuestro caso, la forma complicada de las fronteras hace imposible encontrar la función (P + Q) analíticamente, y se recurre a experimentación con fenómenos físicos que también satisfacen la ecuación de Laplace.

Inicialmente se trató en la Oficina de Ingeniería Experimental de utilizar la Analogía de la Membrana para encontrar las curvas de igual (P + Q), pero los aparatos con que se cuenta no permitieron alcanzar la precisión necesaria. Se pensó entonces utilizar la Analogía Eléctrica.

Imaginemos un medio conductor atravesado por una corriente eléctrica estacionaria. En este medio existe un sistema de superficies equipotenciales y un sistema de líneas de fuerza. Experimentalmente se ha encontrado que las líneas de corriente coinciden con las líneas de fuerza.

Sea un tubo de fuerza como el indicado, en la figura y dos puntos próximos A y B, y  $W_A$  y  $W_B$  las áreas de las secciones normales en estos puntos. Si suponemos la distancia AB suficientemente pequeña podemos suponer que...  $W_A = W_B = W$ . Sean  $V_A$  y  $V_B$  los valores del potencial en A y B.

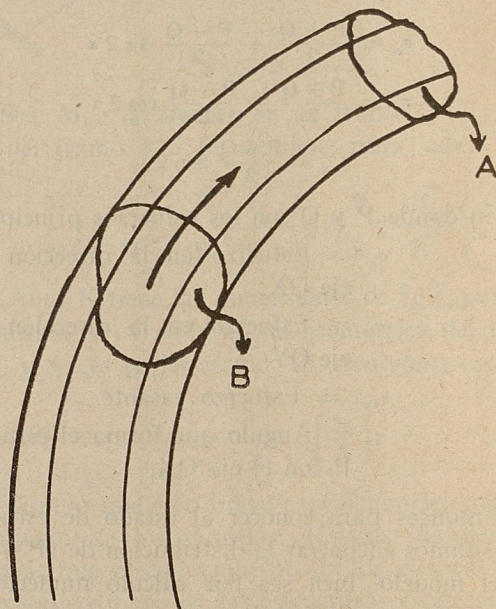


Fig. 1

Este tubo de fuerza es también tubo de corriente: si  $C$  es la intensidad de la corriente y  $\tau$  la resistencia específica del medio, la resistencia del tramo  $AB$  del conducto vale:

$$\rho = \frac{AB}{W} \tau$$

De acuerdo con la ley de Ohm.

$$V_A - V_B = \rho C_w = \frac{AB\tau}{W} CW$$

o bien,

$$\frac{V_A - V_B}{AB} = C\tau$$

Si no hay discontinuidades en la función  $V$  tendremos:

$$\lim. \frac{V_A - V_B}{AB} = - \frac{\delta V}{\delta S} \quad (AB = \delta S)$$

$$AB \rightarrow 0$$

El signo menos aparece por que  $V$  es decreciente si se toma como positivo para  $(S)$ , la dirección de la corriente.

Tendremos:

$$- \frac{\delta V}{\delta S} = \tau C$$

Si tenemos un sistema de ejes cartesianos  $X, Y, Z$  y  $l, m, n$ , los cosenos directores de la línea de corriente en el punto  $A$  y si  $u, v, w$ , son las componentes de la corriente en la dirección de los ejes  $X, Y, Z$ , para el punto  $A$ , se tendrá:

$$u = lC \quad v = mC \quad w = nC$$

Por tanto

$$\frac{\delta V}{\delta x} = \frac{1}{\delta S} \delta V = - \tau lC = - u\tau$$

o bien:

$$u = - \frac{1}{\tau} \frac{\delta V}{\delta x} \quad \text{análogamente: } v = - \frac{1}{\tau} \frac{\delta V}{\delta y} \quad \text{y} \\ w = - \frac{1}{\tau} \frac{\delta V}{\delta z}$$

Si en el medio conductor no hay ni fuentes, ni sumideros de corriente, entonces la integral del flujo de corriente extendida a una superficie cerrada  $(s)$  cualquiera, debe ser nula. Es decir, si  $l_1, m_1, n_1$ , son los cosenos directores de la normal en cualquier punto de la superficie  $S$  se tendrá:

$$\iint_s (l_1 u + m_1 v + n_1 w) ds = 0$$

Por el teorema de Green podemos escribir:

$$\iiint_s (l_1 u + m_1 v + n_1 w) ds = \iiint_v \left( \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \right) dx dy dz$$

Siendo  $V$  el volumen encerrado por la superficie  $S$ , tenemos:

$$\iiint_v \left( \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \right) dx dy dz = 0$$

Como esto se cumple para cualquier volumen  $(V)$  considerado dentro del medio conductor, se debe tener:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

Si substitimos en (3) los valores de  $u, v, w$ , encontradas por medio de la Ley de Ohm tendremos:

$$\frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{1}{\tau} \frac{\delta v}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left( \frac{1}{\tau} \frac{\delta v}{\delta y} \right) + \frac{\delta}{\delta z} \left( \frac{1}{\tau} \frac{\delta v}{\delta z} \right) = 0$$

Si  $\tau$  es constante para todo el medio tendremos:

$$\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} = \nabla^2 V = 0$$

Es decir que el potencial eléctrico en un medio conductor homogéneo satisface la ecuación de Laplace.

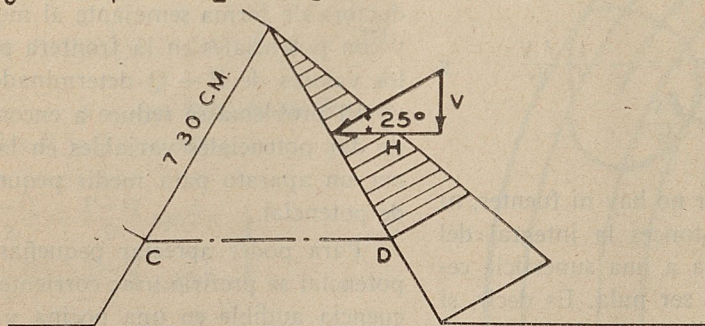
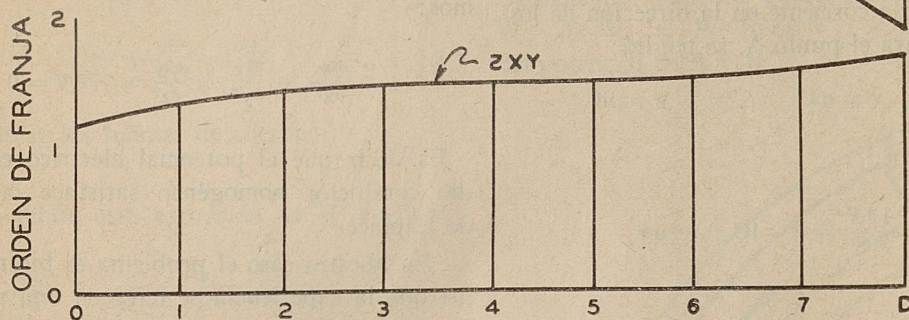
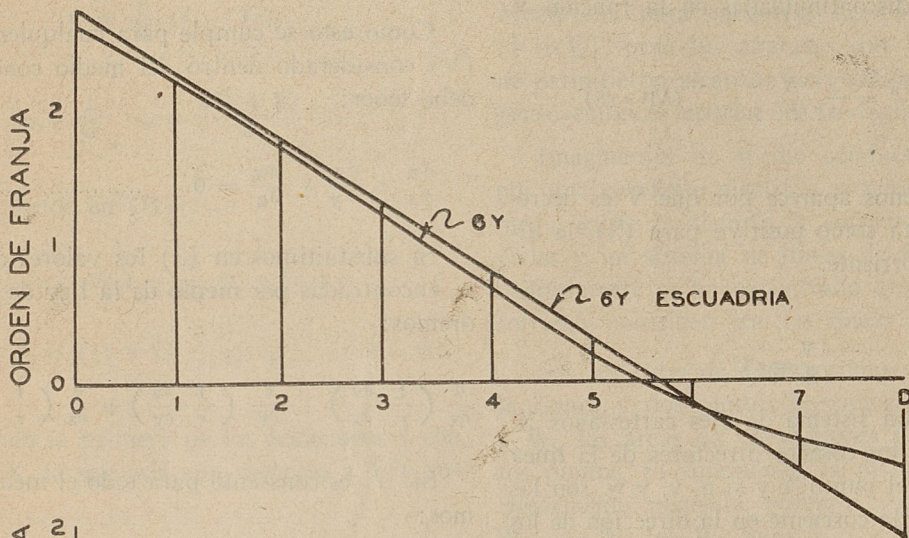
En nuestro caso el problema es bidimensional, así que la experiencia se hará en una placa conductora de forma semejante al modelo estudiado, y con potenciales en la frontera proporcionales a los valores de  $P + Q$  determinados ópticamente.

El problema se reduce a encontrar la manera de dar potenciales variables en la frontera y tener un aparato para medir pequeñas diferencias de potencial.

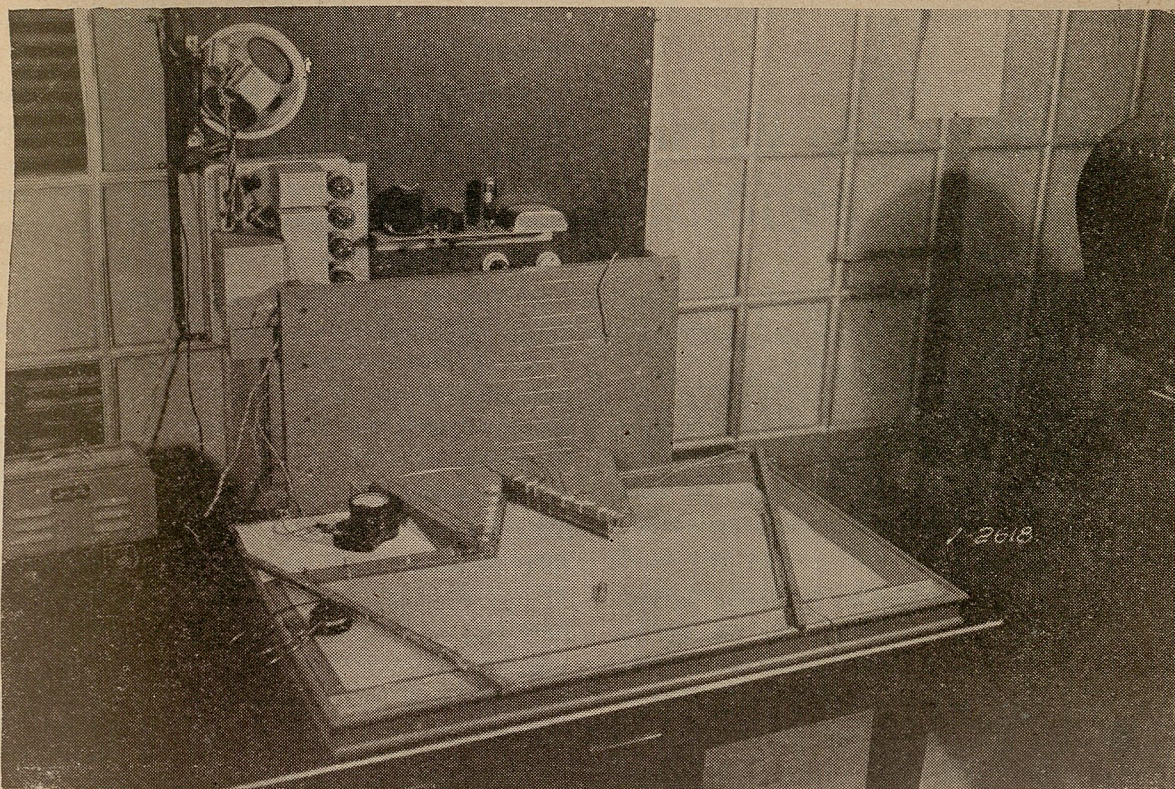
Para poder apreciar pequeñas diferencias de potencial se prefirió usar corriente alterna de frecuencia audible en una bocina y determinar las líneas equipotenciales por medio de un amplificador.

El aparato se compone de las siguientes partes:

| PUNTO | $\frac{P-Q}{2}$ | $\frac{P+Q}{2}$ | $i$    | $2i$    | $\text{SEN} 2i$ | $\text{COS} 2i$ | $\frac{P-Q}{2} \text{COS} 2i$ | $z$  | $6X$ | $6Y$ | $\frac{P-Q}{2} \text{Sen} 2i$ |
|-------|-----------------|-----------------|--------|---------|-----------------|-----------------|-------------------------------|------|------|------|-------------------------------|
| C     | 1.55            | 1.60            | 25°    | 50°00'  | 0.766           | 0.643           | 1.03                          | 1.23 | 0.52 | 2.58 | 1.22                          |
| 1     | 1.50            | 1.50            | 32°30' | 65°00'  | 0.906           | 0.423           | 0.63                          | 1.36 | 0.87 | 2.13 | 1.36                          |
| 2     | 1.42            | 1.50            | 40°30' | 81°00'  | 0.988           | 0.156           | 0.23                          | 1.48 | 1.19 | 1.65 | 1.48                          |
| 3     | 1.35            | 1.50            | 48°15' | 96°30'  | 0.993           | 0.113           | 0.17                          | 1.49 | 1.52 | 1.18 | 1.49                          |
| 4     | 1.25            | 1.65            | 55°00' | 110°00' | 0.939           | 0.342           | 0.56                          | 1.55 | 1.81 | 0.69 | 1.54                          |
| 5     | 1.15            | 1.80            | 60°30' | 121°00' | 0.857           | 0.515           | 0.93                          | 1.54 | 2.08 | 0.22 | 1.54                          |
| 6     | 1.00            | 1.97            | 63°45' | 127°00' | 0.793           | 0.619           | 1.20                          | 1.56 | 2.20 | 0.20 | 1.56                          |
| 7     | 0.90            | 2.12            | 65°00' | 130°00' | 0.766           | 0.642           | 1.36                          | 1.63 | 2.26 | 0.46 | 1.62                          |
| D     | 0.80            | 2.25            | 65°00' | 130°00' | 0.766           | 0.643           | 1.45                          | 1.73 | 2.25 | 0.65 | 1.72                          |



ESTUDIO DEL CONTRAFUERTE DE UN MACHON DE CABEZA REDONDA  
 DISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN LA SECCION C-D DEL CONTRAFUERTE DEBIDOS A CAR. DE AG.



Fotografía del dispositivo con un tanque que representa el contrafuerte de un machón.

1º Un oscilador que produce una corriente débil alterna de frecuencia audible.

2º Un amplificador que eleva la potencia de la corriente a unos 10 watts.

3º Una resistencia conectada a la salida del amplificador (2) que sirve para obtener distintos potenciales.

4º Un tanque de forma semejante al modelo estudiado y de material aislante con una lámina de agua de 5 mm. de espesor, que sirve de medio conductor.

5º Un analizador formado por un amplificador y una bocina que acusa cualquier diferencia de potencial, produciendo un sonido de la frecuencia de la corriente con que se alimenta el tanque.

En la resistencia (3) se buscan los puntos de potencial apropiado, por medio de un voltmetro de precisión. En la figura (2) se muestra un esquema del aparato.

Los valores apropiados de potencial en las fronteras se dan por medio de pequeños electrodos. Para evitar el efecto de concentraciones que se produce en cada electrodo, se conectan entre sí por medio de una resistencia de carbón sumergida también en el agua.

Los electrodos se ponen en los puntos en que las gráficas de  $P + Q$  presentan máximo, mínimo o inflexión.

Es claro que a mayor número de electrodos se tiene una distribución de potencial más precisa

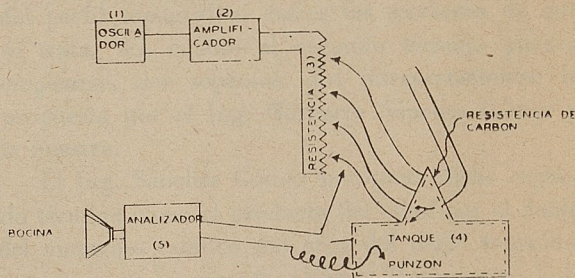
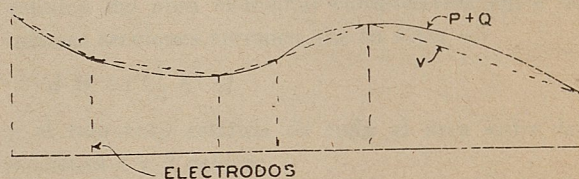


Fig 2.



con respecto a la gráfica de  $P + Q$ . En la figura se muestra una comparación de una gráfica de  $P + Q$  y una gráfica de los valores de  $(V)$ :

Fig. 3

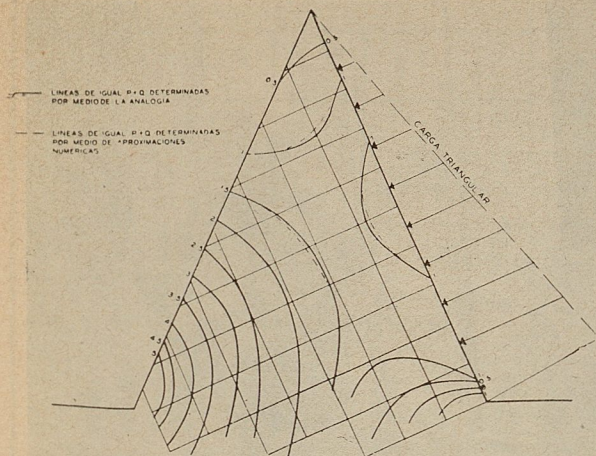


Fig. 4.

Los electrodos provocan en la lámina de agua una pequeña corriente eléctrica. Se pueden determinar equipotenciales por medio del analizador en la forma siguiente:

Uno de los extremos del analizador se conecta a uno de los electrodos de potencial conocido. El otro extremo provisto de un punzón se pone en contacto con el agua del tanque. Habrá sonido en la bocina del analizador siempre que haya diferencia de potencial en sus extremos. Por tanto todos los puntos para los cuales no se acuse sonido estarán en una curva equipotencial.

En la figura 4 se muestran las gráficas obtenidas para las líneas de igual  $P + Q$  y su com-

paración con las obtenidas por medio de aproximaciones numéricas.

Posteriormente se vió la conveniencia de usar como analizador un par de audífonos sin amplificador. Con esto se logró evitar zumbidos parásitos que quitaban aproximación al dispositivo. En estas condiciones el error al fijar el punzón no llega a un milímetro.

También se modificó la resistencia divisora de voltaje, poniendo únicamente dos tramos de 3 m. de longitud sobre una varilla de madera que tiene una escala graduada. Este permite fijar los potenciales con mayor precisión que con el voltmetro.

Para facilitar la conexión de los electrodos, se construyeron unos anillos que deslizan sobre varillas de madera que se colocan en las fronteras.

Las resistencias que se usan para conectar entre sí los electrodos se fabrican con granito pulverizado mezclado con acetato de amilo aplicado con pistola de aire a tiras de piralina. Se les da una resistencia de unos 500 ohm./cm.

Conocidas las isopáquicas por este procedimiento, la distribución de los esfuerzos en cualquier sección de la estructura se obtiene fácilmente.

En la página 80, se muestra un ejemplo de cálculo de fatigas en una sección horizontal del contrafuerte, a partir de los datos obtenidos en las experiencias ópticas y de los datos de la Analogía Eléctrica.