

VIBRACION DE LA MEMBRANA CIRCULAR DE DOS DENSIDADES

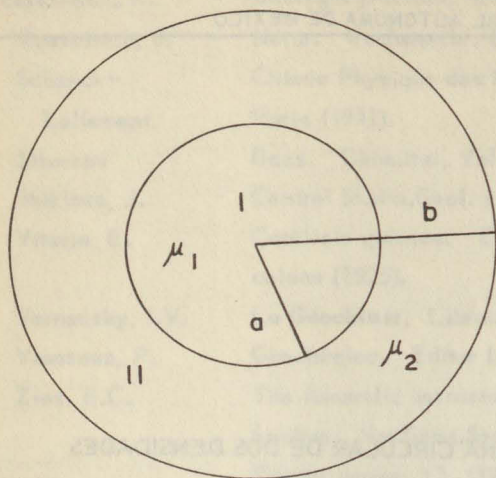
Marcos Moshinsky

RESUMEN

In many fields of Geophysics we find problems of vibrations of continuous mediums, where the physical characteristics change suddenly when we pass from one region to another of the medium. To prepare the ground work for a general analysis of this type of problem, we shall discuss in this paper the vibrations of a circular membrane of two densities.

En diversos campos de la Geofísica se presentan con frecuencia problemas relacionados con vibraciones en medios continuos cuyas características varían de una región a otra del medio. Con el objeto de sentar las bases para una discusión general del problema de vibraciones en medios contínuos de diferentes propiedades físicas, en contacto a lo largo de una frontera, se procederá en este trabajo a hacer el análisis detallado de la vibración de la membrana circular de dos densidades.

El problema de las vibraciones de una membrana circular de dos densidades tiene también interés por su conexión en las vibraciones elásticas de un cilin-



dro de un material determinado que se encuentra rodeado por un medio elástico de características distintas.

El problema que tratamos de resolver es el siguiente: Consideremos una membrana de densidad (por unidad de área) μ_1 y radio a , rodeada por una membrana en forma de corona circular de densidad μ_2 y radio exterior b , ambas membranas están unidas en la circunferencia de radio a y la circunferencia de radio b permanece

fija. La tensión T por unidad de longitud en cualquier parte de la membrana, la vamos a suponer la misma en ambas regiones.

Llamaremos $u(r, \theta, t)$ al desplazamiento normal en la membrana I y $v(r, \theta, t)$ al desplazamiento en la membrana II, sabemos que u y v satisfacen

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{con} \quad v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}, \quad \text{para} \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$\nabla^2 v = \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{con} \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}, \quad \text{para} \quad a \leq r \leq b.$$

Supongamos ahora las siguientes condiciones iniciales: Para $t = 0$,

$$(u)_{t=0} = f(r) \quad \text{con} \quad 0 \leq r \leq a \quad \text{y} \quad (v)_{t=0} = F(r) \quad \text{con} \quad a \leq r \leq b, \quad (1)$$

donde $f(a) = F(a)$ y $F(b) = 0$. Además:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right]_{t=0} = 0, \quad (2)$$

para toda r .

Se va a tratar pues el caso de simetría radial; el caso general presenta las mismas características que éste.

Las condiciones a la frontera son las siguientes: los desplazamientos $u(r,t)$ y $v(r,t)$ coinciden para $r = a$ en todo tiempo, es decir:

$$u(a,t) = v(a,t) \quad . \quad (3)$$

Para la segunda condición en la frontera $r = a$, como T es la tensión o sea la fuerza que aparece por unidad de longitud sobre cualquier pequeño segmento que cortemos en la membrana, si cortamos un pequeño segmento sobre la circunferencia $r = a$ y tangente a ella, experimenta en la región I una fuerza normal al plano, igual aproximadamente a:

$$T \, a \, d\theta \left[\frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \right]_{r=a}$$

(en donde por ser la vibración de pequeña amplitud se reemplaza el seno por la tangente), y en la región II la fuerza normal es:

$$T \, a \, d\theta \left[\frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \right]_{r=a}$$

y como deben ser iguales en la frontera, la segunda condición a la frontera para $r = a$ es:

$$\left[\frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \right]_{r=a} = \left[\frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \right]_{r=a} \quad . \quad (4)$$

La tercera condición a la frontera es:

$$v(b,t) = 0 \quad (5)$$

Las ecuaciones que debemos satisfacer al ser u y v independientes de θ son:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{con} \quad 0 \leq r \leq a, \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{con} \quad a \leq r \leq b.$$

Por el método de separación de variables y teniendo en cuenta la condición (2), tenemos¹:

$$u(r,t) = A J_0\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) \cos \omega t \quad \text{con} \quad 0 \leq r \leq a, \quad (7)$$

$$v(r,t) = \left[B J_0\left(\frac{\omega r}{v_2}\right) + C N_0\left(\frac{\omega r}{v_2}\right) \right] \cos \omega t \quad \text{y} \quad a \leq r \leq b,$$

donde J_0 y N_0 son las funciones de Bessel de primera y segunda clase respectivamente y de orden 0 y $u(r,t)$ no depende de $N_0\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)$, porque esta función se hace infinita en el origen. A , B y C son constantes arbitrarias.

Las condiciones a la frontera nos dan:

$$A J_0\left(\frac{\omega a}{v_1}\right) = B J_0\left(\frac{\omega a}{v_2}\right) + C N_0\left(\frac{\omega a}{v_2}\right), \quad (3')$$

$$\frac{1}{v_1} A J_1\left(\frac{\omega a}{v_1}\right) = \frac{1}{v_2} B J_1\left(\frac{\omega a}{v_2}\right) + \frac{1}{v_2} C N_1\left(\frac{\omega a}{v_2}\right), \quad (4')$$

$$0 = B J_0\left(\frac{\omega b}{v_2}\right) + C N_0\left(\frac{\omega b}{v_2}\right). \quad (5')$$

En donde (4') se debe a que $\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$.

Tenemos un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas: A, B y C, y para que éstas no sean idénticamente nulas se debe anular el determinante del sistema.

$$\begin{vmatrix} J_0\left(\frac{\omega a}{v_1}\right) & J_0\left(\frac{\omega a}{v_2}\right) & N_0\left(\frac{\omega a}{v_2}\right) \\ \frac{1}{v_1} J_1\left(\frac{\omega a}{v_1}\right) & \frac{1}{v_2} J_1\left(\frac{\omega a}{v_2}\right) & \frac{1}{v_2} N_1\left(\frac{\omega a}{v_2}\right) \\ 0 & J_0\left(\frac{\omega b}{v_2}\right) & N_0\left(\frac{\omega b}{v_2}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

Esta última relación nos da las frecuencias características de nuestro sistema, las cuales son reales y como además $J_0(x) = J_0(-x)$, consideraremos sólo las frecuencias características positivas, a las que ordenaremos según su magnitud y designaremos* con ω_k ($k = 1, 2, \dots$).

Para cada ω_k tenemos tres constantes A_k, B_k, C_k que no son independientes, sino que dos de ellas son funciones lineales de la tercera, las cuales se obtienen resolviendo cualquiera de las dos ecuaciones (3'), (4') y (5'). Consideremos a A_k como constante arbitraria y B_k, C_k determinadas por ella. Llamemos ahora $M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right)$ a la siguiente combinación lineal de J_0 y N_0 :

$$\begin{aligned} M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right) &= \frac{B_k}{A_k} J_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right) + \frac{C_k}{A_k} N_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right) = \\ &= \frac{J_0\left(\frac{\omega_k a}{v_1}\right) N_0\left(\frac{\omega_k b}{v_2}\right) J_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right) - J_0\left(\frac{\omega_k a}{v_1}\right) J_0\left(\frac{\omega_k b}{v_2}\right) N_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right)}{J_0\left(\frac{\omega_k a}{v_2}\right) N_0\left(\frac{\omega_k b}{v_2}\right) - N_0\left(\frac{\omega_k a}{v_2}\right) J_0\left(\frac{\omega_k b}{v_2}\right)} \quad (9) \end{aligned}$$

* Para la discusión de las relaciones de estas frecuencias características con la relación de densidades y radios, véase el apéndice A.

Tenemos entonces que $M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right)$ es la función característica de la región II, que evidentemente satisface las relaciones:

$$J_0\left(\frac{\omega_k a}{v_1}\right) = M_0\left(\frac{\omega_k a}{v_2}\right) \quad (3'')$$

$$\left[\frac{d}{dr} J_0\left(\frac{\omega_k r}{v_1}\right)\right]_{r=a} = \left[\frac{d}{dr} M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right)\right]_{r=a} \quad (4'')$$

$$M_0\left(\frac{\omega_k b}{v_2}\right) = 0 \quad (5'')$$

cuando ω_k es una de las frecuencias características. También $M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right) \cos \omega_k t$ satisface a la segunda de las ecuaciones (6), por ser combinación lineal de funciones de Bessel.

Si ahora escribimos:

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\omega_k r}{v_1}\right) \cos \omega_k t \quad (10)$$

$$v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right) \cos \omega_k t$$

donde A_k es una constante arbitraria, igual en ambos casos y $\omega_1, \omega_2, \dots$ las diferentes frecuencias características, tenemos que $u(r,t)$ y $v(r,t)$ satisfacen las ecuaciones (6), las condiciones a la frontera (3), (4) y (5) y la condición inicial (1), lo que implica determinar A_k de manera que:

$$u(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\omega_k r}{v_1}\right) = f(r) \quad \text{si } 0 \leq r \leq a \quad (11)$$

$$v(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right) = F(r) \quad \text{si } a \leq r \leq b$$

Para determinar la A_k procedemos a formar una relación de ortogonalidad

dad.

Sabemos² que si $u(x)$ satisface la ecuación:

$$[pu']' + qu + \lambda wu = 0,$$

donde p, q, w son funciones de x y $u' = \frac{du}{dx}$ etc., y si $v(x)$ satisface la misma ecuación con λ' en lugar de λ entonces:

$$(\lambda' - \lambda) \int_a^b w(x) uv dx = [p(vu' - uv' r)]_a^b.$$

Como $J_0\left(\frac{\omega_k r}{v_1}\right)$ satisface $\frac{d}{dr} r \frac{dJ_0}{dr} + r \frac{\omega_k^2}{v_1^2} J_0 = 0$ y $M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right)$ satisface esa ecuación con v_2 en lugar de v_1 , tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_k^2 - \omega_n^2}{v_1^2} \int_0^a r J_0\left(\frac{\omega_k r}{v_1}\right) J_0\left(\frac{\omega_n r}{v_1}\right) dr &= \left[r \left\{ J_0\left(\frac{\omega_k r}{v_1}\right) J_0'\left(\frac{\omega_n r}{v_1}\right) - J_0\left(\frac{\omega_n r}{v_1}\right) J_0'\left(\frac{\omega_k r}{v_1}\right) \right\} \right]_0^a \\ &= a \left\{ J_0\left(\frac{\omega_k a}{v_1}\right) J_0'\left(\frac{\omega_n a}{v_1}\right) - J_0\left(\frac{\omega_n a}{v_1}\right) J_0'\left(\frac{\omega_k a}{v_1}\right) \right\} \end{aligned}$$

y para $M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right)$ aprovechando que $M_0\left(\frac{\omega_k b}{v_2}\right) = 0$, se tiene:

$$\frac{\omega_k^2 - \omega_n^2}{v_2^2} \int_0^b r M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right) M_0\left(\frac{\omega_n r}{v_2}\right) dr = -a \left\{ M_0\left(\frac{\omega_k a}{v_2}\right) M_0'\left(\frac{\omega_n a}{v_2}\right) - M_0\left(\frac{\omega_n a}{v_2}\right) M_0'\left(\frac{\omega_k a}{v_2}\right) \right\}$$

Es indudable que cada integral por separado no se anula si $k \neq n$, pero si sumamos ambas integrales y aprovechamos las relaciones (3'') y (4''), vemos que la suma se anula. Entonces si $k = n$ y por tanto $\omega_k \neq \omega_n$ y recordando que $\frac{1}{v_1^2} = \frac{\mu_1}{T}$ y $\frac{1}{v_2^2} = \frac{\mu_2}{T}$, se tiene que:

$$\mu_1 \int_0^a J_0\left(\frac{\omega_k r}{v_1}\right) J_0\left(\frac{\omega_n r}{v_1}\right) r dr + \mu_2 \int_0^b M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right) M_0\left(\frac{\omega_n r}{v_2}\right) r dr = 0, \quad (12)$$

si $k \neq n$.

Esta es la condición de ortogonalidad de este tipo de problema.

Para el cálculo de los coeficientes A_k , consideremos las ecuaciones (11) y formemos la integral:

$$\begin{aligned} \mu_1 \int_0^a f(r) J_0\left(\frac{\omega_n r}{v_1}\right) r dr + \mu_2 \int_a^b F(r) M_0\left(\frac{\omega_n r}{v_2}\right) r dr = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\mu_1 \int_0^a J_0\left(\frac{\omega_k r}{v_1}\right) J_0\left(\frac{\omega_n r}{v_1}\right) r dr + \mu_2 \int_a^b M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right) M_0\left(\frac{\omega_n r}{v_2}\right) r dr \right]. \end{aligned}$$

Por la condición de ortogonalidad (12) la integral entre paréntesis del segundo miembro se anula si $k \neq n$ y nos queda sólo el término con A_n como factor, de donde:

$$A_n = \frac{\mu_1 \int_0^a f(r) J_0\left(\frac{\omega_n r}{v_1}\right) r dr + \mu_2 \int_a^b F(r) M_0\left(\frac{\omega_n r}{v_2}\right) r dr}{\mu_1 \int_0^a \left[J_0\left(\frac{\omega_n r}{v_1}\right) \right]^2 r dr + \mu_2 \int_a^b \left[M_0\left(\frac{\omega_n r}{v_2}\right) \right]^2 r dr} \quad (13)$$

Hemos hecho implícitamente la suposición que las series son uniformemente convergentes, y que el sistema de funciones características es "completo" (Vollständigkeit)³, daremos una demostración de esas cualidades para este tipo de problemas, en un artículo próximo.

Tenemos entonces que las fórmulas (10), con A_k evaluado por la fórmula (13) representan la solución del problema planteado de la membrana de dos densidades.

La condición de ortogonalidad necesaria para este tipo de problema es la (12). Esta condición tiene una aplicación interesante en el cálculo de la energía total de la membrana de dos densidades*.

* Para el cálculo de la energía de la membrana de dos densidades véase el apéndice B.

APENDICE A

Discusión de la Ecuación que Determina las Frecuencias Características

Considerando el determinante (8), si multiplicamos la segunda columna por ω_a , y si desarrollamos el determinante llamado $u = \frac{\omega_a}{v_1}$, $v = \frac{\omega_a}{v_2}$, $m = \frac{b}{a}$ y $n = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$, tenemos que el determinante (8) toma la forma:

$$\frac{uJ_1(u)}{J_0(u)} = \frac{v [N_0(mv)J_1(v) - J_0(mv)N_1(v)]}{N_0(mv)J_0(v) - J_0(mv)N_0(v)} \quad (a)$$

Además, u y v están relacionadas por la ecuación:

$$u = nv \quad (b)$$

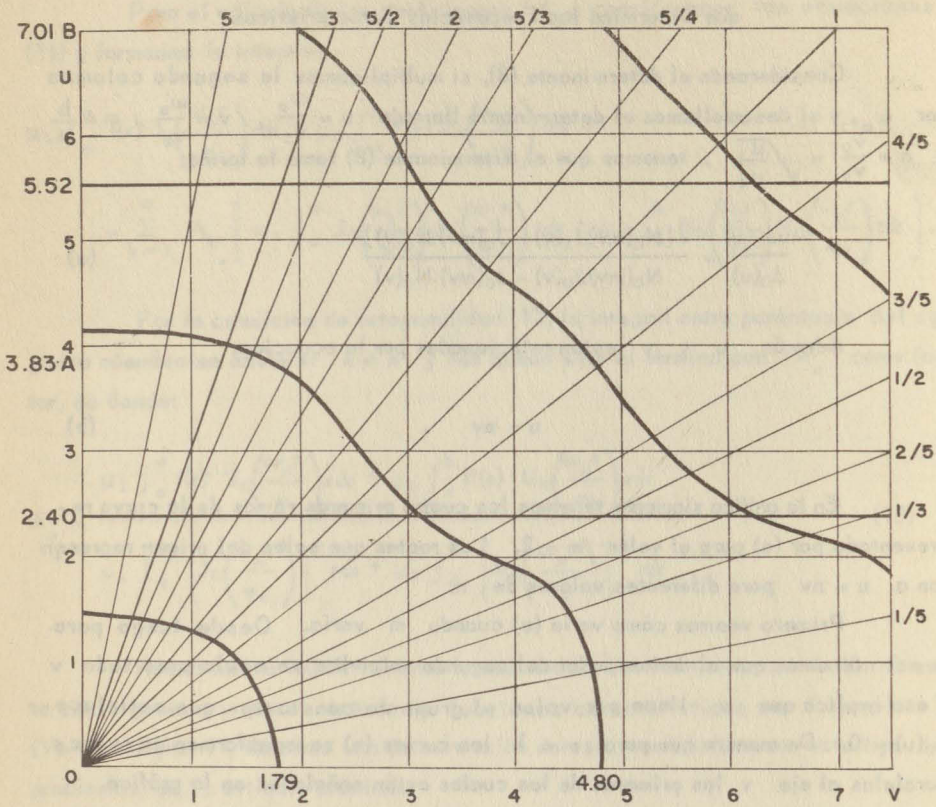
En la gráfica siguiente tenemos las cuatro primeras ramas de la curva representada por (a) para el valor $m = 2$. Las rectas que salen del origen representan a $u = nv$ para diferentes valores de n .

Primero veamos cómo varía (a) cuando m varía. Desde luego para $m = 1$ tenemos que el denominador del segundo miembro se anula para toda v y eso implica que u tiene por valor el grupo de constantes que satisface $J_0(u) = 0$. De manera que para $m = 1$ las curvas (a) se transforman en rectas paralelas al eje v , las primeras de las cuales están señaladas en la gráfica.

Para los valores de u para $v = 0$, sustituimos en el segundo miembro de (a) los valores asintóticos de J_0 y N_0 cuando el argumento es pequeño⁵, y en el límite cuando $v \rightarrow 0$, se ve que (a) se convierte en:

$$\frac{uJ_1(u)}{J_0(u)} = \frac{1}{Lm} \quad (c)$$

Esta es la ecuación que determina a u cuando $v = 0$, y vemos que si $m \rightarrow \infty$, entonces las u son raíces de $J_1(u) = 0$, la primera de las cuales



es 0. En la ecuación (c) L_m es el logaritmo natural de m .

Cuando $u = 0$, entonces el examen de (a) muestra que v satisface:

$$J_1(v) N_0(mv) - N_1(v) J_0(mv) = 0 \quad . \quad (d)$$

Las primeras dos raíces de la expresión anterior, cuando $m = 2$, están marcadas en la gráfica.

Designemos ahora con x_1 a la primera raíz de $J_0(x)$ y en la expresión (d) pongamos $mv = x_1$, en cuyo caso el segundo término de la expresión (d) se anula por ser $J_0(x_1) = 0$ y nos queda sólo:

$$J_1\left(\frac{x_1}{m}\right) N_0(x_1) \quad .$$

Ahora bien, si $m \rightarrow \infty$, $\frac{x_1}{m} \rightarrow 0$ y $J_1\left(\frac{x_1}{m}\right) \rightarrow 0$; de manera que si m es suficientemente grande $\frac{x_1}{m}$ es aproximadamente raíz de (d). De manera análoga $\frac{x_2}{m}$, $\frac{x_3}{m}$ etc., son raíces de (d) si m es grande y x_2, x_3 , etc., son raíces de $J_0(x)$. Vemos entonces que si $m \rightarrow \infty$. los valores de v que anulan a la expresión (d) tienden a 0.

Si consideramos ahora la expresión (a) cuando $u = v$ vemos que se reduce a:

$$J_0(mu) [J_1(u) N_0(u) - J_0(u) N_1(u)] = 0 \quad .$$

La expresión entre paréntesis no se anula por ser el Wronskiano de dos funciones linealmente independientes, de manera que en los puntos de corte de las rectas $u = v$ y las curvas (a), los valores de u son tales que mu es igual a las raíces de $J_0(x)$ y cuando $m \rightarrow \infty$ vemos que $u \rightarrow 0$ en los puntos de corte de la recta $u = v$ con las curvas (a).

De todo lo anterior vemos que la primera de las ramas de la curva (a) varía con m desde una línea recta $u = 2.4048$ cuando $m = 1$ hasta curvas que se encogen hacia el origen a medida que $m \rightarrow \infty$.

Para la n -ésima rama de la curva vemos que pasa de la recta u igual a la n -ésima raíz de $J_0(u)$ para $m = 1$, hasta curvas que tienden a confundirse con el segmento de recta sobre el eje de las " u ", que va del origen al valor de u correspondiente a la n -ésima raíz de $J_1(u)$, contando a $u = 0$ como la primera raíz.

Derivando la ecuación (a) con respecto a v y despejando $\frac{du}{dv}$, y considerando el valor de esa derivada cuando $v \rightarrow 0$ se ve que la derivada se anula y la segunda derivada es negativa, de manera que en los puntos donde $v = 0$, u presenta un máximo. Considerando ahora $\frac{du}{dv}$ para cuando $u \rightarrow 0$ vemos que tiende a infinito, o sea $\frac{du}{dv} \rightarrow 0$, y considerando la segunda derivada se ve cuando $v = 0$, v presenta un máximo.

Ahora ya estamos en condiciones de discutir las frecuencias características.

Si suponemos la densidad de la membrana interior fija lo mismo que su radio, entonces la frecuencia característica es $\omega = \sqrt{\frac{\mu_1}{T}} \frac{u}{a}$ y por tanto proporcional a u . Vemos ahora que para una relación dada de radios la frecuencia característica va aumentando a medida que $n = \sqrt{\frac{\mu_1}{T}}$ aumenta, es decir, a medida que μ_2 disminuye ya que μ_1 es fija. Si $\mu_2 < \mu_1$ las frecuencias características son mayores que las de una membrana de las mismas dimensiones y densidad homogénea, si $\mu_2 > \mu_1$ sucede lo contrario.

Si para una relación de densidad dada el radio exterior aumenta, entonces $m = \frac{b}{a}$ aumenta y las frecuencias características disminuyen en magnitud por las cualidades antes expresadas de las curvas (a). Si por el contrario, el radio exterior b disminuye de su tamaño original, conservándose el radio interior constante, entonces al disminuir m aumenta la magnitud de las frecuencias características ω .

APENDICE B

La energía total de la membrana de dos densidades.

La condición de ortogonalidad (12) nos va a servir para mostrar que la

energía asignada a cada armónico sobre la membrana permanece constante.

La energía cinética en un instante dado para toda membrana es:

$$2\pi \left\{ \frac{\mu_1}{2} \int_0^a \left[\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} \right]^2 r dr + \frac{\mu_2}{2} \int_a^b \left[\frac{\partial v(r,t)}{\partial t} \right]^2 r dr \right\} ,$$

en donde 2π aparece por la integración con respecto a θ .

Considerando las fórmulas (10) y la relación de ortogonalidad (12), vemos que la energía cinética de toda la membrana es:

$$2\pi \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \omega_k^2 \text{sen}^2(\omega_k t) \left\{ \frac{\mu_1}{2} \int_0^a \left[J_0\left(\frac{\omega_k r}{v_1}\right) \right]^2 r dr + \frac{\mu_2}{2} \int_a^b \left[M_0\left(\frac{\omega_k r}{v_2}\right) \right]^2 r dr \right\} .$$

Designando la expresión entre paréntesis por C_k^2 tenemos la energía cinética como:

$$2\pi \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 C_k^2 \omega_k^2 \cos^2(\omega_k t) .$$

Ahora para la energía potencial consideramos que está dada por el incremento de área de la membrana multiplicada por la tensión⁶.

Si w es el desplazamiento normal, entonces:

$$T \int_s \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2} dx dy - T \int_s \int dx dy ,$$

nos da la energía potencial. Desarrollando el radical, tenemos, despreciando términos de orden superior al ser w pequeña, que la energía potencial es:

$$T \int_s \int \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy .$$

Como la expresión entre paréntesis es $[\nabla w]^2$, la energía potencial

en coordenadas polares es:

$$T \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta .$$

Como en nuestro caso w no depende de θ , entonces $\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$ y poniendo $\int_0^b = \int_0^a + \int_a^b$ se tiene para la energía potencial:

$$2\pi T \left[\frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 r dr + \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 r dr \right] .$$

La expresión $\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2$ nos da productos de la forma:

$$A_k A_n \frac{dJ_0 \left(\frac{\omega_k r}{v_1} \right)}{dr} \frac{dJ_0 \left(\frac{\omega_n r}{v_1} \right)}{dr} \cos \omega_k t \cos \omega_n t .$$

Designando $\frac{dJ_0 \left(\frac{\omega_k r}{v_1} \right)}{dr} = J'_{ok}$ formemos la integral:

$$\int_0^a J'_{ok} J'_{on} r dr = [r J_{ok} J'_{on}]_0^a - \int_0^a J_{ok} \frac{dr J'_{on}}{dr} dr ,$$

pero $[r J'_{on}]' = -\frac{\omega_n^2}{v_1^2} J_{on}$, de manera que:

$$T \int_a^b M'_{ok} M'_{on} r dr = T [r M_{ok} M'_{on}]_a^b + \mu_2 \omega_n^2 \int_a^b M_{ok} M_{on} r dr .$$

De manera análoga se tiene:

$$T \int_0^a J'_{ok} J'_{on} r dr = T [r J_{ok} J'_{on}]_0^a + \mu_1 \omega_n^2 \int_0^a J_{ok} J_{on} r dr .$$

Sumando las dos últimas expresiones, considerando las condiciones (3'')

(4'') y (5'') en la frontera, y las relaciones de ortogonalidad (12) se tiene que:

$$\frac{T}{2} \int_0^a J'_{ok} J'_{on} r dr + \frac{T}{2} \int_a^b M'_{ok} M'_{on} r dr = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \omega_k^2 C_k^2 & \text{si } k = n \end{cases}$$

donde C_k^2 tiene el mismo significado que para la energía cinética.

De aquí la energía potencial toma la forma:

$$2\pi \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 C_k^2 \omega_k^2 \cos^2 \omega_k t$$

Y sumando ambas energías, tenemos que la energía total E es constante e igual a:

$$\bar{E} = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 C_k^2 \omega_k^2$$

La energía sobre las dos regiones de la membrana correspondiente al armónico k es evidentemente:

$$E_k = 2\pi A_k^2 C_k^2 \omega_k^2$$

y es constante para cada armónico.

Si se hubiera hecho la integración de la energía sólo sobre una región de la membrana, la energía para cada armónico no hubiera resultado constante.

De la expresión anterior vemos que el coeficiente A_k , que podríamos llamar amplitud del armónico k , es proporcional a la raíz cuadrada de la energía correspondiente a ese armónico, cualquiera que sea el desplazamiento inicial.

REFERENCIAS.

1. Slater and Frank, "Introduction to Theoretical Physics", Chap. XV.
2. Margenau and Murphy, "Mathematics of Physics and Chemistry", Chap. VIII.

3. Courant und Hilbert, "Methoden der Mathematischen Physik", Cap.II.
4. Jahnke und Emde, "Funktionentafeln", pp. 128 y 132.
5. Courant und Hilbert, loc.cit. pp. 214-219.

REFERENCIAS

1. Wigner and Wigner, "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics", John Wiley & Sons, New York, 1927.

2. Jahnke and Emde, "Funktionentafeln", Leipzig, 1908.

3. Courant and Hilbert, "Methoden der Mathematischen Physik", Berlin, 1924.