Vol. X ANALES DEL INSTITUTO DE GEOFISICA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO 1964

APLICACIONES DE LA TEORIA DE SUBSTITUCIONES A LA GEOFISICA *

A. CHARGOY * *

RESUMEN

Para una distribución de masa $[m_i]$ en la cual se miden momento de inercia, momento estático y potencial, en general: $V = \sum m_i f(r_i)$ desde un punto dado. Se definen: centro, plano principal y eje principal de tal manera que la distribución $[m_i]$ determina en sí estos elementos.

En el caso de la Tierra tales elementos coinciden con: centro del planeta, ecuador geográfico y eje de rotación.

Si la distribución es tal que $\sum m_i = 0$, con el mismo criterio del caso anterior, se determinan: centro, plano principal y eje principal.

En el caso geomagnético el centro determinado coincide con 0_c propuesto por A. Schmidt, el eje coincide con el dipolo y el plano es el propuesto para definir el ecuador magnético de la Tierra (M. G. de Alvarez, 1963).

Así, la definición de ecuador geomagnético se apoya en motivos geofísicos y matemáticos.

ABSTRACT

For a distribution of mass $[m_i]$ in which inertia momentum, static momentum, and potential are measured, in general terms: $V = \sum m_i f(r_i)$ from a given point. Center, main plane, and main axis are defined in such a manner that the distribution $[m_i]$ determines these elements.

In the case of the Earth, these elements coincide with the center of the planet, the geographical equator, and the axis of rotation.

If the distribution is such that $\sum m_i = 0$, as is done in the previous case, the center, the main plane and the main axis are determined.

In the geomagnetic case, the determined center coincides with 0_c proposed by A. Schmidt. the axis coincides with the dipole and the plane is proposed to define the magnetic equator of the Earth (M. G. de Alvarez, 1963).

Thus, the definition of the geomagnetic equator has geophysical and mathematical motives.

---

* *Instituto de Geofísica, U.N.A.M.*

* * *Este trabajo se presentará en la Reunión de la Unión Geofísica Mexicana, en Hermosillo, Son., en el mes de Marzo de 1965.*

I: GEOMETRIA DE CIERTAS DISTRIBUCIONES

Se tiene por distribución una colección S_o: $[Q_i\ (m_i)]$ de puntos Q_i contenida en un espacio E convexo. En cada punto Q_i reside un número m_i real, no cero. Esta colección da propiedades al espacio que se miden en un punto P por

$$V = \Sigma\, m_i\, f\,(r_i),\quad r_i = \overline{PQ}_i\,,\ \text{f tiene todas sus derivadas.} \tag{1}$$

Si $m_i > 0$ para toda i y se hace un desarrollo de Taylor con centro 0 en E

$$S_1:\quad V = u_0\,A_0 - \overline{u}_1\,A_1 + \frac{1}{2!}\overline{u}_2\ \ [A_2\,\overline{v}'_2]$$
$$-\frac{1}{3!}\overline{u}_3\ [(A_3\,\overline{v}'_3)\ \overline{w}'_3] + \cdots \tag{2}$$

u_0, $\overline{u_1}$, $\overline{v_2}$, etc., dependen de m_i y las coordenadas de Q_i.

$$A_0 = f,\ A_1 = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix},\qquad A_2 = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & \cdots\cdots & \\ f_{zx} & \cdots\cdots & \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

f_x indica derivada de f respecto a x.

Un desarrollo de la forma (2) se define como substitución.

Se definen: centro de S_0 el centro en 0_c que hace mínimo en valor absoluto a $V_1 = \overline{u_1}\ A_1$; plano principal M al que contiene a $\overline{u_2}$, $\overline{v_2}$; eje principal al perpendicular a M en 0_c. Se ve que 0_c coincide con el centro G de masa. Se pueden tomar como ejes de referencia los simétricos a $\overline{u_1}$, $\overline{v_1}$ y escribir entonces:

$$S_k:\quad V = \Sigma\, m_i\, f\,(r) + \frac{1}{2!}\,(u^2_{2,x}\, f_{xx} - u^2_{2,y}\, f_{yy}) + \cdots \tag{3}$$

los ejes son determinados por la distribución S_0 y S_k puede definirse como forma canónica de $[S_i]$.

Si $\Sigma\, m_i = 0$, la forma correspondiente a S_k es

$$V = -\,a\,f_z + (b_{11}\, f_{xx} - b_{22}\, f_{yy}) + \cdots$$

si f es tal que $\nabla^2 f = 0$, entonces

$$V = -\,af_z + b\,(f_{xx} - f_{yy}) - \cdots \tag{4}$$

se ve que también 0_c y los ejes de referencia son dados por S_0.

II: GRAVIMETRIA Y FORMA DE LA TIERRA

Si se usan estas ideas en el caso gravimétrico de la Tierra, considerando su masa como una colección $[m_i]$, $f = \frac{1}{r}$ y usando coordenadas esféricas la substitución S_k en la ecuación (3) toma la forma

$$V = \frac{g_0^0}{r} P_0^0 + \frac{1}{r^3} [g_2^0 P_2^0 + g_2^2 \cos 2 \lambda P_2^2]$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots$$

en g_j^i, h_j^i, i, j son índices, P_j son polinomios de Legendre. Si $[m_i]$ es simétrica respecto al eje ZZ′ (de rotación), V es independiente de λ, por lo cual

$$V = \frac{1}{r} g_0^0 + \frac{1}{r^3} g_2^0 P_2^0 + \frac{1}{r^4} g_3^0 P_3^0 + \frac{1}{r^5} g_4^0 P_4^0 + \ldots \tag{5}$$

si también hubiera simetría respecto al plano XOY (ecuador geográfico) sería

$$V = \frac{1}{r} g_2^0 + \frac{1}{r^3} g_2^0 P_2^0 + \frac{1}{r^5} g_4^0 P_4^0 + \ldots \tag{6}$$

Se ve que la ecuación (6) es la propuesta por Jeffreys, mientras que la (5) resulta de observaciones de satélites, por ejemplo, cuando se agrega $\frac{1}{r^4} g_3^0 P_3^0$ en la (6) aún cuando este término sea pequeño (Cook, A. H., 1958).

Desde luego que la (5) tenía que resultar mejor aproximación para V, ya que se sabe que los dos hemisferios no son simétricos con el ecuador geográfico. Probablemente en el Sistema Solar, para los elementos que lo forman, los potenciales tanto del Sol como de los planetas se comportan como la ecuación (5) o cuando menos la (6). Y así, en ellos, el eje de rotación, el centro de masa y el plano del ecuador corresponden a centro de la distribución, plano y eje principales, pues es de esperar que la distribución sea simétrica respecto al eje de rotación y como en la Tierra, no hay por qué esperar simetría ecuatorial.

III: GEOMAGNETISMO

En este fenómeno puede considerarse la existencia de una distribución $[m_i]$ en el interior del planeta en que se verifica $\Sigma\, m_i = 0$, $f = \frac{1}{r}$. El sistema de referencia es el geográfico; el eje ZZ' es el de rotación; el plano XOY es el ecuatorial geográfico; se usan coordenadas esféricas; para una primera aproximación se considera al planeta como esférico de radio $a = 1$; los puntos $P(r, \lambda, \theta)$ desde los cuales se toma $V = \Sigma \frac{m_i}{m_i}$ son exteriores al planeta, de suerte que $r \geqslant a$; con estas condiciones la ecuación (2) queda en la forma:

$$S_1: \quad V = -\overline{u_1}\, A_1 + \frac{1}{2!}\overline{u_2}\,[A_2\, \overline{v'_2}] \tag{7}$$

$$- \frac{1}{3!}\overline{u_3}\,[(A_3\, \overline{v'_3})\, \overline{w'_3}] + \ldots .$$

$$= \frac{1}{r^2}\,[g_1^0 P_1^0 + (g_1^1 \cos\lambda + h_1^1 \operatorname{sen}\lambda)\, P_1^1]$$

$$+ \frac{1}{r^3}\,[g_2^0 P_2^0 + (g_2^1 \cos\lambda + h_2^2 \operatorname{sen}\lambda)\, P_2^1$$

$$+ (g_2^2 \cos 2\lambda + h^z \operatorname{sen} 2\lambda)\, P_2^2] + \ldots .$$

que es la conocida ecuación del potencial geomagnético dada por Gauss.

Como se dijo en el párrafo I, se introducen las definiciones de:

a) Centro de la distribución, un punto O_c en el cual una substitución, S_2 de S_1, sea localizada con la condición de hacer mínimo a $V_2 = \frac{1}{2}\overline{u_2}\,[A_2\, \overline{v'_2}]$ segundo término de la ecuación (7).

b) Eje principal de la distribución, el eje que en este caso coincide con la dirección del vector $\overline{u_1}$ de la ecuación (7).

c) Plano principal, el plano que contiene a los vectores $\overline{u_2}$, $\overline{v_2}$, después de hecha la substitución S_2; se comprueba que este plano es normal a $\overline{u_1}$.

Si después de S_2 los ejes de referencia X'X, Y'Y se toman simétricos a las direcciones $\overline{u_2}$, $\overline{v_2}$, como en el párrafo II, se ve que $S_2 \;\; S_1 = S_k$.

Con lo cual puede escribirse la ecuación (4) en la siguiente forma:

$$V = \frac{1}{r^2} g_1^0 P_1^0 + \frac{1}{r^3} g_2^2 \cos 2\lambda P_2^2 \qquad (8)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

como en el caso gravimétrico tratado en el párrafo II, se ve que el definir como ecuador al plano que contiene a los vectores $\overline{u_2}$, $\overline{v_2}$, tiene motivos de similitud tanto numéricos como geofísicos aparte que ya se han tratado otros, como en el artículo citado en el resumen.

IV: VARIACIONES Y SIMETRIAS GRAVIMETRICAS

En cualquiera de las teorías que se usen para la formación de un sistema planetario, es de aceptarse y se sugiere en primer lugar que la forma inicial de cada planeta es de una bola sin simetrías. Por tanto, el potencial inicial V está dado por la ecuación (3). En segundo lugar, habiendo suficiente fluidez, la mecánica de distribución de masa la hará tender hacia una distribución simétrica respecto al centro G del conjunto. El movimiento de rotación modifica esa tendencia hacia una forma de tipo oblato con simetría ecuatorial desde luego. La sugestión es que en esta forma la tendencia es pasar V de la ecuación (3) a la (5) y de ella a la (6). Esto explica por qué g_3^0 en la ecuación (5) es pequeño en la Tierra y probablemente también en otros planetas. No puede decirse que el movimiento de distribución que tendería a ser simétrica respecto al ecuador gravimétrico haya terminado.

Como es bien sabido, la corteza terrestre tiene movimientos muy pequeños a muy largo plazo, por lo que debe esperarse que el eje de rotación no corte a la corteza en puntos fijos y por lo tanto, también que haya pequeños cambios en la intersección del plano ecuatorial gravimétrico con la corteza.

V: VARIACIONES, SIMETRIAS Y ANOMALIAS MAGNETICAS

Es admisible que entre todos los cuerpos que tienen campo magnético propio: estrellas, Sol y planetas, estos últimos, cuando tienen gran parte de su masa en estado sólido, los fenómenos del campo magnético se amortigüen perdiendo rapidez e intensidad.

Entre esos fenómenos puede considerarse el cambio de signo del vector $\overline{u_1}$ de la ecuación (7), observado en estrellas α^2 "Canun Venaticorum" (Babcock, H. W. y T. G. Cowling, 1953). El cambio que se realiza en forma periódica en cinco días y medio para esa estrella pudo haber tenido lugar en el pasado en el caso del planeta Tierra. Pero, el amortiguamiento dejó el último cambio de signo hace más de medio millón de años, según evidencias del magnetismo fósil y probablemente tiende a desaparecer en forma asintótica.

En los últimos 120 años este vector $\overline{u_1}$ ha pasado del valor −3309 a −3120 unidades (1 unidad = 10^{-4} oersteds) y no puede decirse que vaya a seguir disminuyendo el valor absoluto y a cambiar de signo.

Otro fenómeno es el movimiento de distribución $[m_i]$ cuyo potencial se mide en la ecuación (7) y que produce el efecto de rotación de los vectores $\overline{u_2}$, $\overline{v_2}$, en el plano principal que definen y en sentido contrario a la rotación de la Tierra, el centro de la distribución 0_c desplazándose también en ese mismo sentido. La rotación de los vectores mencionados es de 38° en la dirección indicada en 120 años. Probablemente este fenómeno se observe también en otros cuerpos que no se mueven monolíticamente, como Júpiter, para el cual se ha encontrado un retraso del campo magnético de 1.3″ por cada vuelta de satélite sobre su eje; A. Smith, en Chile y Florida, y también Douglas, en Yale, reportan este retraso (Franklin, K. L., 1964).

Como se deduce fácilmente en la ecuación (8), el campo magnético que está medido a través de los términos 1o. y 2o. de esa ecuación da simetrías respecto al eje principal y al plano principal y no se explican a través de ellos ciertas anomalías planetarias, por ejemplo, el ecuador dado por la carta para cualquier época. Es necesario, entonces, recurrir a información de los términos siguientes con lo cual se tendrán datos sobre el movimiento de la fuente que produce el campo magnético.

En estos tres principales fenómenos señalados se continúa la investigación. Se señala, por último, la existencia de fenómenos exteriores que tiendan a ser simétricos respecto al eje principal y plano principal (ecuador), como es la formación de las bandas de Van Allen, que probablemente existen también en planetas como Júpiter y otros que son muy flúidos y cuya rotación (como en el caso del último) presentan condiciones para la existencia de campo magnético propio.

APENDICE

En la ecuación (2) se tienen:

$$u_0 = \Sigma\, m_i$$

$$\overline{u_1} = (u_{1,x}, u_{1,y}, u_{1,z}) \text{ en que}$$

$$u_{1,x} = \Sigma\, m_i\, x_i \;;\; u_{1,y} = \Sigma\, m_i\, y_i$$

$$u_{1,z} = \Sigma\, m_i\, z_i$$

$$\overline{u_2} = \Sigma\, (u_{2,x},\, u_{2,y},\, u_{2,z})$$

$$\overline{v_2} = \Sigma\, (v_{2,x},\, v_{2,y},\, v_{2,z}) \text{ en que}$$

$$u_{2,x}\, v_{2,x} = \Sigma\, m_i\, x^2_{i,y} \qquad u_{2,y}\, v_{2,y} = \Sigma\, m_i\, y_i^2$$

$$u_{2,x}\, v_{2,y} + u_{2,y}\, v_{2,x} = 2\, \Sigma\, m_i\, x_i\, y_i$$

$$u_{2,x}\, v_{2,z} + u_{2,z}\, v_{2,x} = 2\, \Sigma\, m_i\, x_i\, z_i$$

$$u_{2,y}\, v_{2,z} + u_{2,z}\, v_{2,y} = 2\, \Sigma\, m_i\, y_i\, z_i$$

$$u_{2,z}\, v_{2,z} = \Sigma\, m_i\, z_i^2$$

así como u_0, $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{v_2}$, también $\overline{u_3}$, $\overline{v_3}$, etc.

dependen de $[m_i]$ y las coordenadas de $[Q_i]$.

BIBLIOGRAFIA

ALVAREZ, M. G. DE. 1963. Definiciones del Ecuador Geomagnético. *Geofísica Internacional*, 3(2):43-48, ilustr.

BABCOCK, H. W. y T. C. COWLING. 1953. *Monthly Notes, Royal Astronomical Soc.*, 113:170.

COOK, A. H. 1958. Determination of the Earth; Gravitation Potential from Observations on Sputnik 2 (1957β). *Geophys. Jour, Royal Astronomical Soc.*, 1(2):341-345, ilustr.

FRANKLIN, K. L. 1964. Radio Waves from Jupiter. *Scientific American*, 211:35-43, ilustr.