Descripción y Usos de la Red de Transformación Conforme o "Conformógrafo"

Por el Ingeniero *MIGUEL URQUIJO*

De la Oficina de Ingeniería Experimental del Depto. de Proyectos de la C. N. I.

EL presente artículo tiene por objeto dar a conocer el fundamento teórico y los usos de un nuevo instrumento para la resolución de la ecuación de Laplace, inventado y construído en el laboratorio de Ingeniería Experimental de la Comisión Nacional de Irrigación, y que ha demostrado ser de gran utilidad práctica, para el trazo de redes de flujo en cortinas de presas permeables o para la filtración por debajo de cortinas impermeables: estas redes de flujo sirven para determinar la subpresión y estudiar el fenómeno de tubificación. Se aplica también el Conformógrafo al diseño de vertedores y transiciones de canales y pilas. En Elasticidad el Conformógrafo se aplica al trazo de las curvas isopáquicas, o sean las curvas de igual suma de esfuerzos principales, y también para obtener la solución de nuevos problemas, partiendo de problemas ya resueltos, a las cuales se les aplica una transformación conforme.

Desde el punto de vista matemático, tiene también importancia el Conformógrafo, pues permite efectuar cualquier transformación conforme, así como resolver el problema de Dirichlet: determinar una función armónica en el interior de una región cuando se conocen sus valores en el borde.

Una transformación geométrica en el plano de transformación de coordenadas se define por dos ecuaciones como las siguientes:

$$X = f_1\,(x,y)$$
$$Y = f_2\,(x,y)$$

Estas ecuaciones deben satisfacer la condición de que el determinante llamado Jacobiano sea distinto de O, es decir que:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\delta f_1}{\delta x}, & \dfrac{\delta f_1}{\delta y} \\ \dfrac{\delta f_2}{\delta x}, & \dfrac{\delta f_2}{\delta y} \end{vmatrix} \neq O$$

Las ecuaciones de transformación de coordenadas establecen una correspondencia entre puntos del plano (x y) y puntos del plano X Y. Esta correspondencia puede ser biunívoca o no. Es biunívoca cuando a un punto del plano (x y) corresponde uno, y solo uno, del plano (XY).

Un caso particular es la "Transformación Afín" definida por las ecuaciones siguientes:

$$X = a_1\,x + b_1\,y + c_1$$
$$Y = a_2\,x + b_2\,y + c_2$$

en que a_1, b_1, a_2, b_2, c_1 y c_2 son constantes, c_1 y c_2 corresponden a una translación y por tanto no se pierde generalidad al hacerlas nulas.

a_1, b_1, a_2, b_2 dispuestas de la siguiente manera forman la matriz de la transformación:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

La transformación afín transforma al vector $\overline{A}$ (Ax, Ay) en el vector $\overline{A}'(A'xA'y)$ en que:

$$\overline{A}'x = a_1\,Ax + b_1\,Ay$$
$$A'y = a_2\,Ax + b_2\,Ay$$

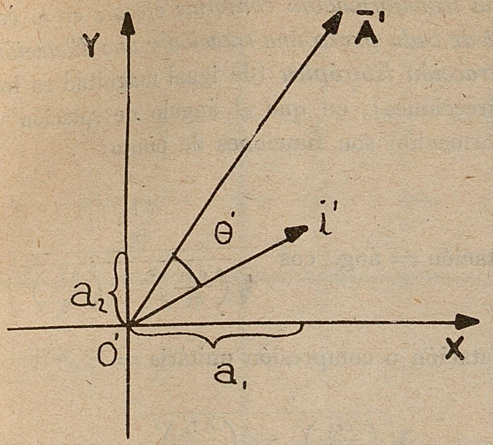
El vector $\overline{i}$ (i,0) se transforma en el vector $\overline{i}'$ (a_1, a_2)

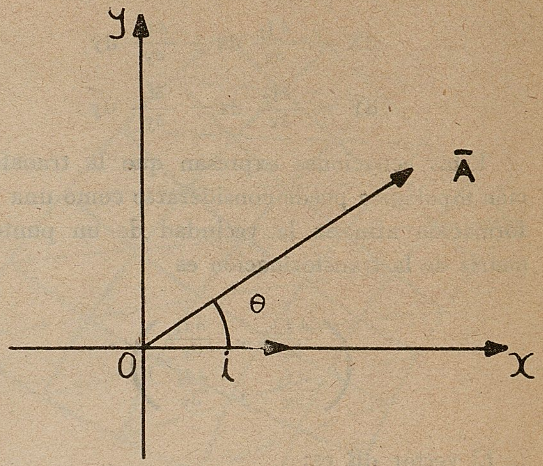
El ángulo θ que forman los vectores $\overline{i}$ y $\overline{A}$ se transforma en el ángulo θ' que forman los vectores $\overline{i}'$ y $\overline{A}'$.

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}\cdot\overline{i}}{|A|} = \frac{Ax}{\sqrt{A^2x + A^2y}}$$

$$\cos\theta' = \frac{\overline{A}'\cdot\overline{i}'}{|A'|\,|i'|} =$$

$$= \frac{a_1^2\,Ax + a_1 b_1\,Ay + a_2^2\,Ax + a_2 b_2\,Ay}{\sqrt{(a_1\,Ax + b_1\,Ay)^2 + (a_2\,Ax + b_2\,Ay)^2}\;\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$





Si la transformación es tal que $\theta' = \theta$, para cualquier vector $\overline{A}$, se le llama transformación afín "Conforme".

Para que $\cos\ \theta = \cos\ \theta'$ idénticamente, es necesario y suficiente que:

$$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$$
$$a_1\, a_2 + b_1\, b_2 = 0$$

y por tanto, debe ser: $a_1 = b_2$ y $a_2 = -b_1$.

La matriz de una transformación afín conforme es:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz puede expresarse como un producto de dos matrices:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} & \dfrac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \\ -\dfrac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} & \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \end{bmatrix}$$

Lo cual equivale a decir que las ecuaciones de transformación se pueden escribir de la siguiente manera:

$$X = a_1\, x + b_1\, y = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\, x + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\, y \right)$$

$$Y = -b_1\, x + a_1\, y = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \left(-\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\, x + \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\, y \right)$$

y haciendo:

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \cos\alpha \quad \text{y} \quad \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \operatorname{sen}\alpha$$

se tiene:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

o lo que es equivalente

$$X = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\ (X \cos\alpha + Y \operatorname{sen}\alpha)$$
$$Y = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\ (-X \operatorname{sen}\alpha + Y \cos\alpha)$$

Por lo tanto, la transformación afín conforme más general consiste en una rotación y una dilatación o contracción homogénea.

La transformación continua más general o transformación topológica se expresa con las ecuaciones siguientes:

$$X = f_1\ (x, y)$$
$$Y = f_2\ (x, y)$$

El vector $\overline{dr}$ (dx, dy) se transforma en el vector $\overline{dR}$ (dX, dY) en que:

$$dX = \frac{\delta f_1}{\delta x} dx + \frac{\delta f_1}{\delta y} dy,$$

$$dY = \frac{\delta f_2}{\delta x} dx + \frac{\delta f_2}{\delta y} dy$$

Estas ecuaciones expresan que la transformación topológica puede considerarse como una transformación afín en la vecindad de un punto. La matriz de la transformación es

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x}, & \frac{\delta f_1}{\delta y} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x}, & \frac{\delta f_2}{\delta y} \end{pmatrix}$$

El vector $\overline{dR}$ es:

$$\overline{dR} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x}, & \frac{\delta f_1}{\delta y} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x}, & \frac{\delta f_2}{\delta y} \end{pmatrix} \overline{dr}$$

Para que la transformación sea conforme debe tenerse por tanto:

$$\frac{\delta f_1}{\delta x} = \frac{\delta f_2}{\delta y} \qquad \frac{\delta f_1}{\delta y} = - \frac{\delta f_2}{\delta x}$$

Estas son las ecuaciones de Rieman-Cauchy y las funciones f_1 y f_2 se llaman funciones conjugadas.

Una transformación conforme efectúa en la vecindad de cada punto una rotación y una dilatación o contracción isotrópica (de igual magnitud en todas direcciones), en que el ángulo de rotación y la deformación son funciones de punto:

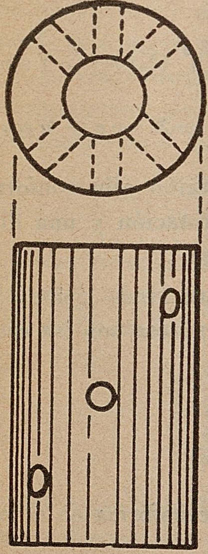
$$\text{Rotación} = \text{áng. cos} \frac{\frac{\delta f_1}{\delta x}}{\sqrt{\left(\frac{\delta f_1}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f_1}{\delta y}\right)^2}}$$

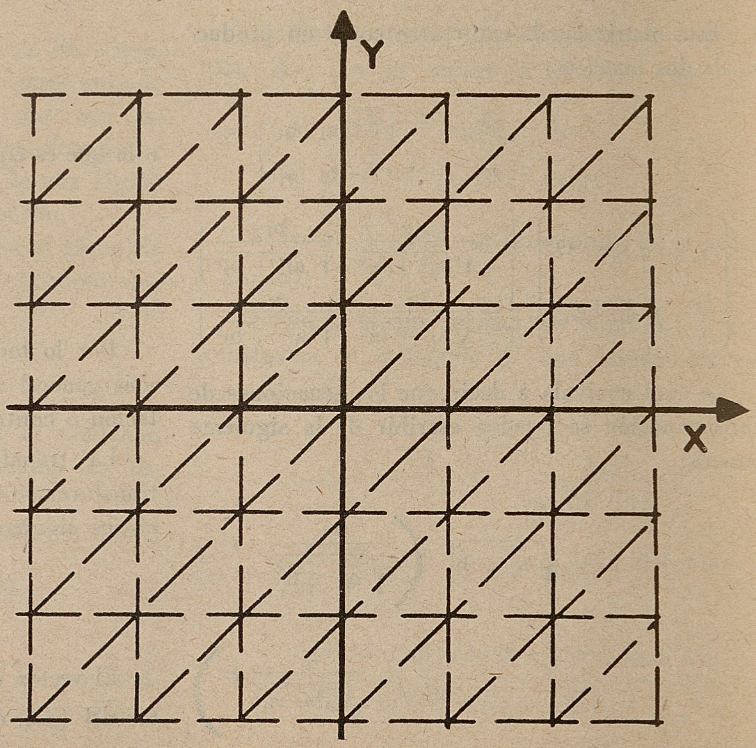
Dilatación o compresión unitaria = [illegible]

$$\sqrt{\left(\frac{\delta f_1}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f_1}{\delta y}\right)^2}$$

Y *toda transformación que efectúa en la vecindad de cada punto una rotación y una deformación isotrópica, es una transformación conforme.*

Este enunciado constituye el fundamento teórico del conformógrafo, que consiste en una red de alambres que forman triángulos rectángulos isósceles, por medio de unas piezas cilíndricas de metal, con tres perforaciones, dos a 90° y una a 45°, por las cuales pasan los alambres de acero templado.





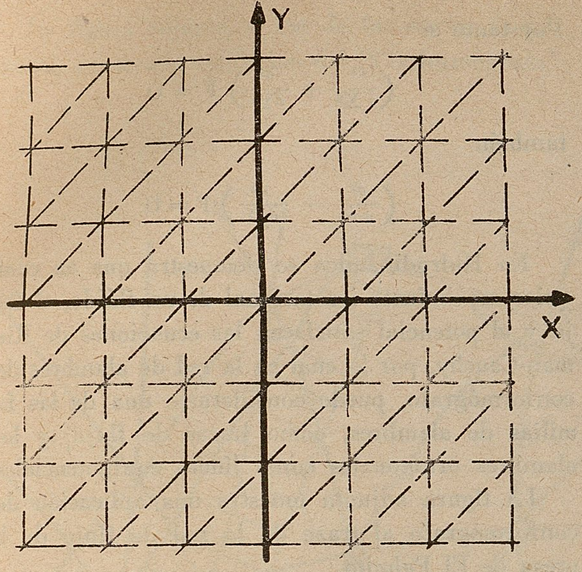


FIG. 1

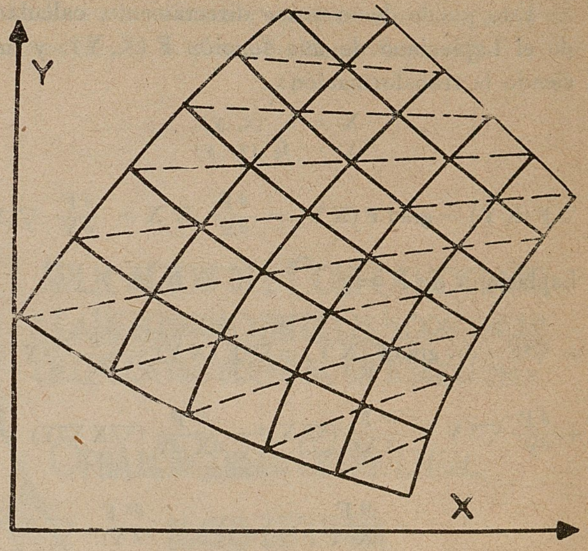


FIG. 2

Las funciones que definen una transformación conforme, satisfacen la ecuación de Laplace, y por tanto son funciones *armónicas conjugadas.*

En efecto:

$$\frac{\delta f_1}{\delta x} = \frac{\delta f_2}{\delta y} \qquad \frac{\delta f_1}{\delta y} = -\frac{\delta f_2}{\delta x}$$

$$\frac{\delta^2 f_1}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 f_2}{\delta x \delta y} \qquad \frac{\delta^2 f_1}{\delta y^2} = -\frac{\delta^2 f_2}{\delta x \delta y}$$

De donde:

$$\text{Laplaciano de } f_1 = \triangle f_1 = \frac{\delta^2 f_1}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f_1}{\delta y^2} = 0$$

y análogamente:

$$\text{Laplaciano de } f_2 = \triangle f_2 = \frac{\delta^2 f_2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f_2}{\delta y^2} = 0$$

Si en el plano (X, Y) consideramos las funciones:

$$\Phi_1 = aX + b_1$$
$$\Phi_2 = aY + b_2$$

Es evidente que son armónicas conjugadas puesto que:

$$\frac{\delta^2 \Phi_1}{\delta X^2} = 0 \text{ y } \frac{\delta^2 \Phi_1}{\delta Y^2} = 0 \quad \therefore \triangle \Phi_1 = \frac{\delta^2 \Phi_1}{\delta X^2} + \frac{\delta^2 \Phi_1}{\delta Y^2} = 0$$

y análogamente:

$$\triangle \Phi_2 = \frac{\delta^2 \Phi_2}{\delta X^2} + \frac{\delta \Phi_2}{\delta Y^2} = 0$$

Si en el plano (X, Y) se coloca la red, formando una cuadrícula (Fig. 1), a los alambres paralelos al eje Y corresponden valores de Φ_1, en progresión aritmética, de razón "a $\triangle$ X", en que $\triangle$ X es el lado de cada uno de los cuadrados y a los alambres paralelos al eje X les corresponden valores de Φ_2, en progresión aritmética, de razón "a $\triangle$ X"

Si se deforma la red conservando cada alambre su parámetro (Fig. 2), cada triángulo rectángulo isósceles se transforma en otro triángulo rectángulo isósceles curvilíneo, y por tanto, se efectúa en la vecindad de cada punto una homotecia y una rotación, por lo cual se efectúa una transformación conforme, conservando cada alambre su parámetro. La transformación conforme está definida por las ecuaciones

$$X = f_1 \ (x, y)$$
$$Y = f_2 \ (x, y)$$

en que f_1 y f_2 son funciones armónicas conjugadas, y las funciones:

$$\Phi_1 \ (X, Y) = a \ X + b \text{ y } \Phi_2 \ (X Y) = a \ Y + b$$

se transforman en:

$$\Phi_1' = a f_1 \ (x, y) + b_1 \text{ y } \Phi_2' = a \ f_2 \ (x, y) + b_2$$

que también son armónicas conjugadas.

Puesto que la transformación conforme puede ser cualquiera, se concluye que toda transformación conforme transforma las funciones armónicas en armónicas.

Esto puede demostrarse directamente, calculando el Laplaciano de una función F (X, Y), y haciendo la transformación:

$$X = f_1 \ (x, y), \qquad Y = f_2 \ (x, y)$$

$$\nabla F (XY) = \text{grad } F (XY) = \frac{\delta F}{\delta X} \nabla X + \frac{\delta F}{\delta Y} \nabla Y$$

Laplaciano de F =

$$= \nabla^2 F = \text{div grad } F (XY) = \nabla^2 F (XY) = \frac{\delta F}{\delta X} \nabla^2 X +$$

$$+ \frac{\delta F}{\delta y} \nabla^2 Y + \frac{\delta^2 F}{\delta X^2} (\nabla X)^2 + \frac{\delta^2 F}{\delta X \ \delta Y} (\nabla X . \nabla Y) +$$

$$+ \frac{\delta^2 F}{\delta X \delta Y} (\nabla X \ \nabla Y) + \frac{\delta^2 F}{\delta Y^2} (\nabla Y)^2$$

Puesto que X e Y son funciones armónicas conjugadas de x e y,

$$\nabla X^2 = \nabla Y^2 \ , \ \nabla X \cdot \nabla Y = 0 \ \text{ y } \ \nabla^2 X = 0, \ \nabla^2 Y = 0$$

$$\therefore \nabla^2 F (XY) = \frac{\delta^2 F}{\delta X^2} + \frac{\delta^2 F}{\delta Y^2} = \left(\frac{\delta^2 F}{\delta X^2} + \frac{\delta^2 F}{\delta Y^2} \right) (\nabla X)^2$$

Por tanto si

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta X^2} + \frac{\delta^2}{\delta Y^2} \right) F = 0$$

también

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right) F = 0$$

En Hidrodinámica se demuestra que en cualquier movimiento irrotacional de un flúido, el flujo y el potencial satisfacen las ecuaciones de Rieman-Cauchy, por lo cual en la red de alambres del conformógrafo, puede considerarse una de las familias de alambres, como líneas de flujo, y los alambres ortogonales como líneas equipotenciales.

La figura adjunta muestra una aplicación del conformógrafo al trazo de la red de flujo de la presa de El Palmito.

En Elasticidad se demuestra que en un problema de distribución plana de las deformaciones, la suma de los esfuerzos principales (P + Q) es una función armónica, por lo cual se puede determinar P + Q en el interior de una región cuando se conocen sus valores en el borde. Este es el problema de Dirichlet en dos dimensiones.

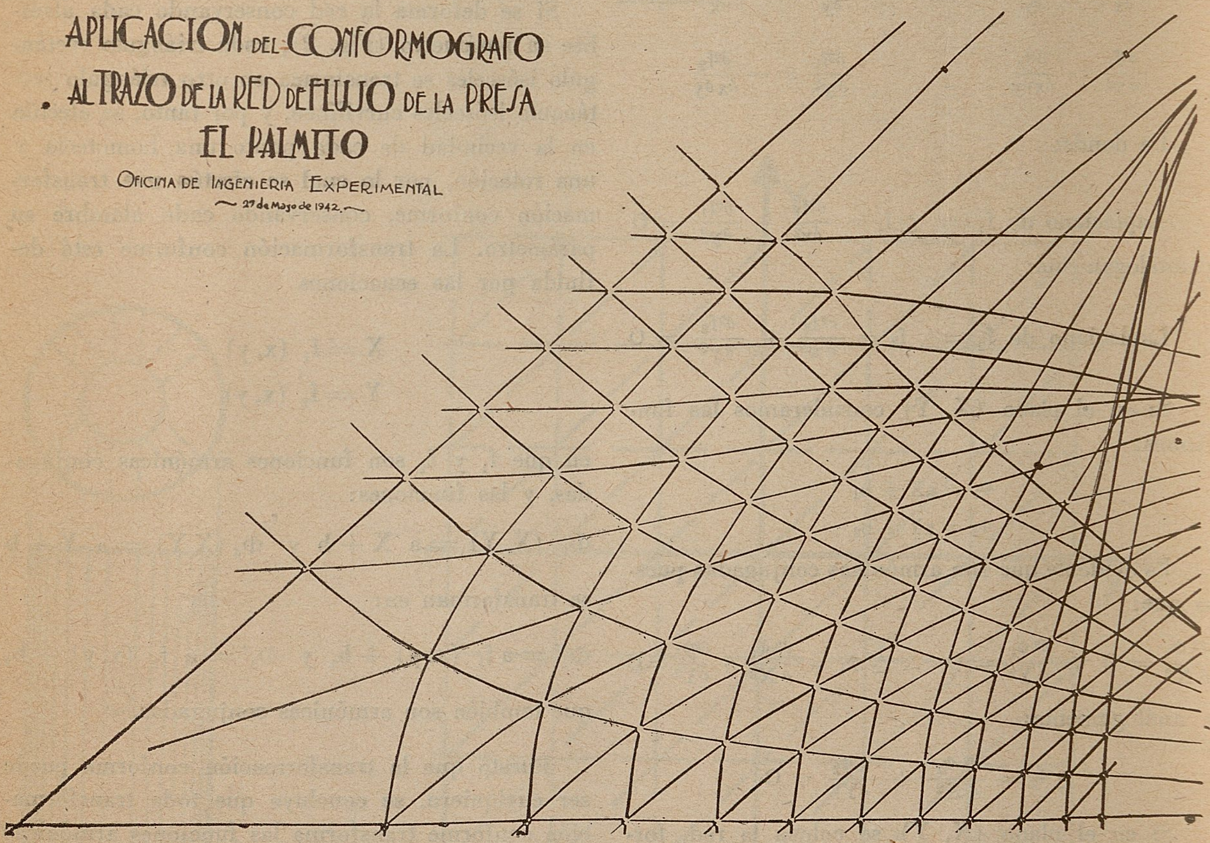


FIG. 3

La figura adjunta, o sea de las curvas isopáquicas, muestra la aplicación del "Conformógrafo" a la determinación de P + Q en el contrafuerte de un machón de la presa de "Las Vírgenes".

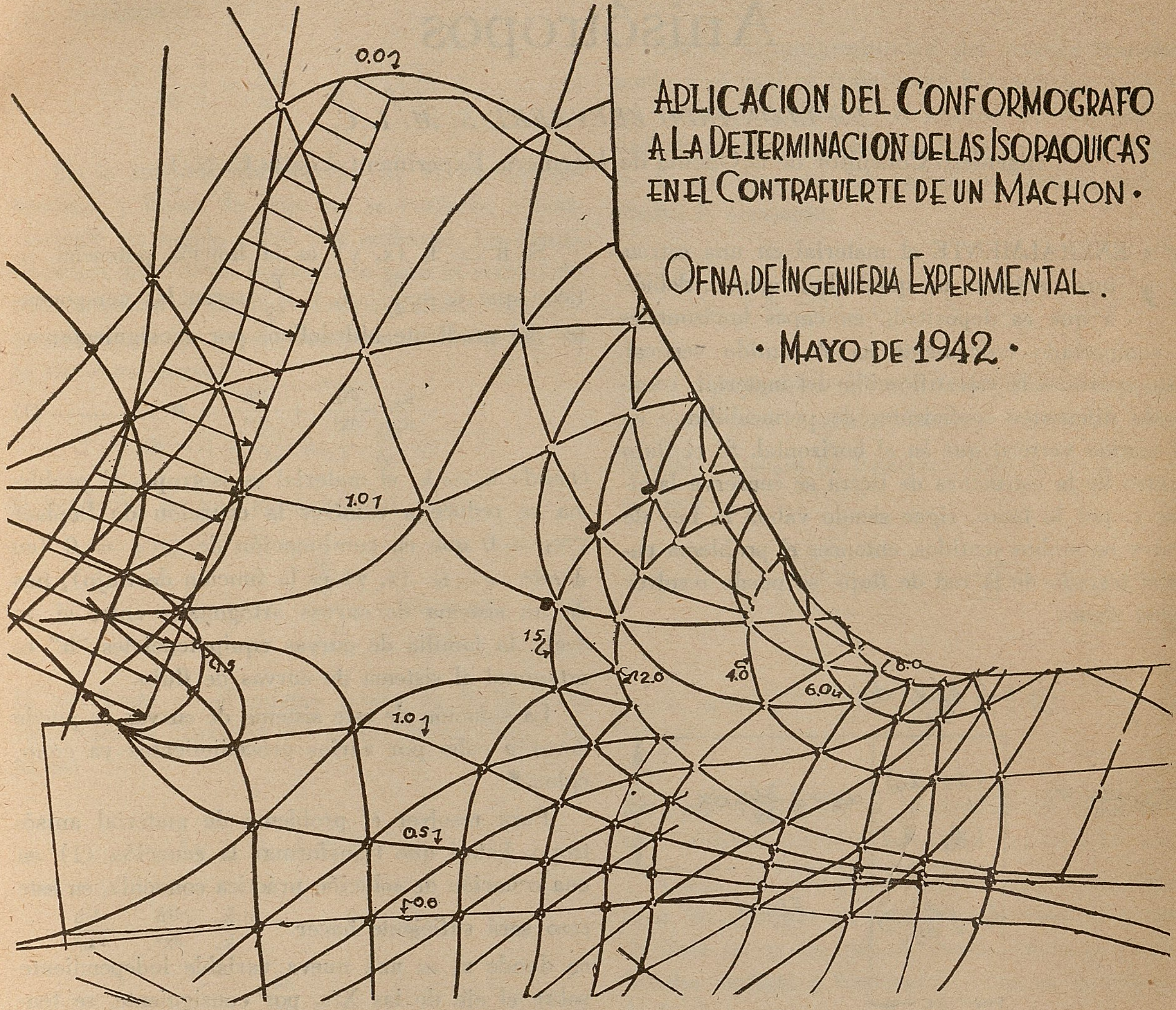


FIG. 4