

APLICACION DE LAS SERIES DE FOURIER A LA DETERMINACION DE LOS ESFUERZOS EN VIGAS DIAFRAGMAS

POR EL ING. JUAN R. *BRELIVET*, DE LA OFICINA DE INGENIERIA EXPERIMENTAL DE LA C. N. I. EN SAN JACINTO D. F.

CASO DE LAS COLUMNAS DEL PUENTE-CANAL DEL ARROYO SAN PEDRO, EN EL SISTEMA DE RIEGO DEL BAJO RIO SAN JUAN, TAMS.

A. Generalidades

Bien se sabe que la teoría general de la flexión simple se aplica únicamente a vigas cuya relación entre el claro y el peralte es bastante grande. De acuerdo con los estudios fotoelásticos hechos por Frocht, cuando la relación del claro al peralte es inferior a tres, las deformaciones por esfuerzo cortante son importantes y la aplicación de la teoría de la flexión simple da resultados erróneos.

Las vigas que se encuentran en este caso, se llaman vigas diafragmas, y aparecen en muchas estructuras, tales, como puentes-canales, columnas huecas de paredes planas, etc.

B. El problema general de las vigas diafragmas

Se supondrá que las cargas exteriores son todas verticales y aplicadas en las partes superior e inferior de la viga. Se llamará l al claro y $2c$ al peralte. Los sentidos positivos están indicados en la figura 1.

El problema es de elasticidad a dos dimensiones que se resuelve encontrando la función ϕ de esfuerzos que verifica la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad \text{---(1)}$$

Si $f_c(x)$ y $f_{-c}(x)$ representan respectivamente las leyes de repartición de los esfuerzos σ_y en las

caras $y = c$ y $y = -c$, las cuatro constantes que intervienen en la función ϕ se determinarán expresando que para:

$$y = +c \quad \tau_{xy} = 0 \quad \sigma_y = f_c(x)$$

$$y = -c \quad \tau_{xy} = 0 \quad \sigma_y = f_{-c}(x)$$

Timoshenko en su "Theory of Elasticity" página 44 y siguientes, da un método para encontrar la función de esfuerzos en forma de una serie de Fourier.

Aunque el método se aplica para cualquier repartición de las fuerzas exteriores, se supondrá aquí, en vista del ejemplo que está al final del artículo, que las cargas exteriores son simétricas con respecto al plano vertical que pasa por el centro de la viga.

Entonces ϕ se puede poner en la forma:

$$\phi = f(y) \times \cos \frac{n \pi x}{l} \quad \text{---(2)}$$

donde n es un entero cualquiera.

Como lo muestra Timoshenko, la ecuación (1), se reduce entonces a

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f^{IV}(y) = 0 \quad \text{---(3)}$$

donde $\alpha = \frac{n \pi}{l}$

La solución de la ecuación (3), es:

$$f(y) = C_1 \operatorname{Ch} \alpha y + C_2 \operatorname{Sh} \alpha y + C_3 y \operatorname{Ch} \alpha y + C_4 y \operatorname{Sh} \alpha y \quad \text{---(4)}$$

y la función de esfuerzos ϕ será:

$$\phi = (C_1 \operatorname{Ch} \alpha y + C_2 \operatorname{Sh} \alpha y + C_3 y \operatorname{Ch} \alpha y + C_4 y \operatorname{Sh} \alpha y) \cos \alpha x \quad (5)$$

De donde se determinarán los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Supóngase que las cargas aplicadas en las aristas $y = +c$ y $y = -c$, son respectivamente de la forma $B \cos \alpha x$ y $A \cos \alpha x$, entonces las

constantes c_1, c_2, c_3, c_4 , se encuentran expresando que para:

$$\begin{aligned} y = +c & \quad \tau_{xy} = 0 & \quad \sigma_y = -B \cos \alpha x \\ y = -c & \quad \tau_{xy} = 0 & \quad \sigma_y = -A \cos \alpha x \end{aligned}$$

En la página 46 de Theory of Elasticity de Timoshenko, se encuentran ya las expresiones de $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

En el libro de Timoshenko, los signos que aparecen delante de $(A-B)$ en dicha obra, deben cambiarse, siendo las expresiones correctas para los esfuerzos, las que se escriben a continuación:

$$\sigma_x = (A+B) \frac{(\alpha c \operatorname{Ch} \alpha c - \operatorname{Sh} \alpha c) \operatorname{Ch} \alpha y - \alpha y \operatorname{Sh} \alpha y \operatorname{Sh} \alpha c}{\operatorname{Sh} 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \cos \alpha x$$

$$- (A-B) \frac{(\alpha c \operatorname{Sh} \alpha c - \operatorname{Ch} \alpha c) \operatorname{Sh} \alpha y - \alpha y \operatorname{Ch} \alpha y \operatorname{Ch} \alpha c}{\operatorname{Sh} 2\alpha c - 2\alpha c} \cdot \cos \alpha x$$

$$\sigma_y = - (A+B) \frac{(\alpha c \operatorname{Ch} \alpha c + \operatorname{Sh} \alpha c) \operatorname{Ch} \alpha y - \alpha y \operatorname{Sh} \alpha y \operatorname{Sh} \alpha c}{\operatorname{Sh} 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \cos \alpha x$$

$$+ (A-B) \frac{(\alpha c \operatorname{Sh} \alpha c + \operatorname{Ch} \alpha c) \operatorname{Sh} \alpha y - \alpha y \operatorname{Ch} \alpha y \operatorname{Ch} \alpha c}{\operatorname{Sh} 2\alpha c - 2\alpha c} \cdot \cos \alpha x \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = (A+B) \frac{\alpha c \operatorname{Ch} \alpha c \operatorname{Sh} \alpha y - \alpha y \operatorname{Ch} \alpha y \operatorname{Sh} \alpha c}{\operatorname{Sh} 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \operatorname{sen} \alpha x$$

$$- (A-B) \frac{\alpha c \operatorname{Sh} \alpha c \operatorname{Ch} \alpha y - \alpha y \operatorname{Sh} \alpha y \operatorname{Ch} \alpha c}{\operatorname{Sh} 2\alpha c - 2\alpha c} \cdot \operatorname{sen} \alpha x$$

C. Descomposición del sistema de cargas exteriores en series de Fourier

El método anterior da la manera de encontrar los esfuerzos en una viga diafragma, siempre que se puedan descomponer las cargas exteriores en términos de la forma $B \cos \alpha x$ ó $A \cos \alpha x$.

La descomposición de las cargas en serie de Fourier da precisamente la solución del problema.

En vista de la aplicación que sigue al final del artículo, se tomarán los 2 casos siguientes:

1º Carga concentrada en la parte central superior, y reacción uniformemente repartida en la parte inferior.

2º Cargas iguales concentradas en las extremidades de la parte superior, y reacción uniformemente repartida en la parte inferior.

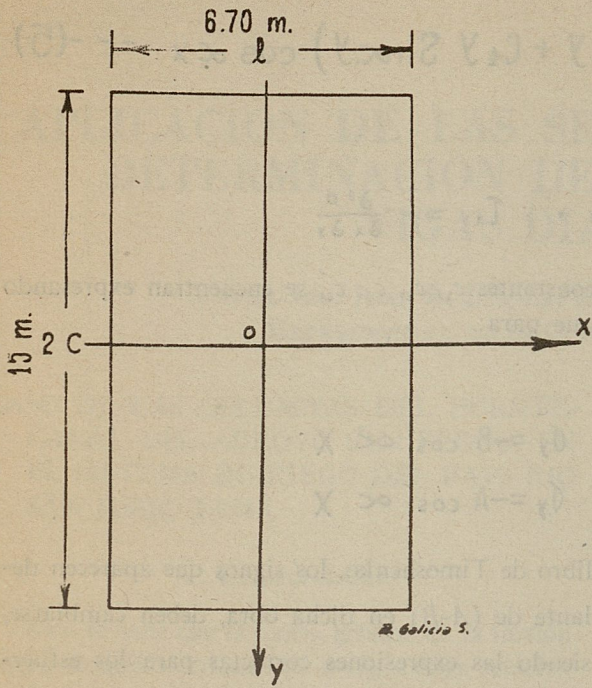


Fig. 1

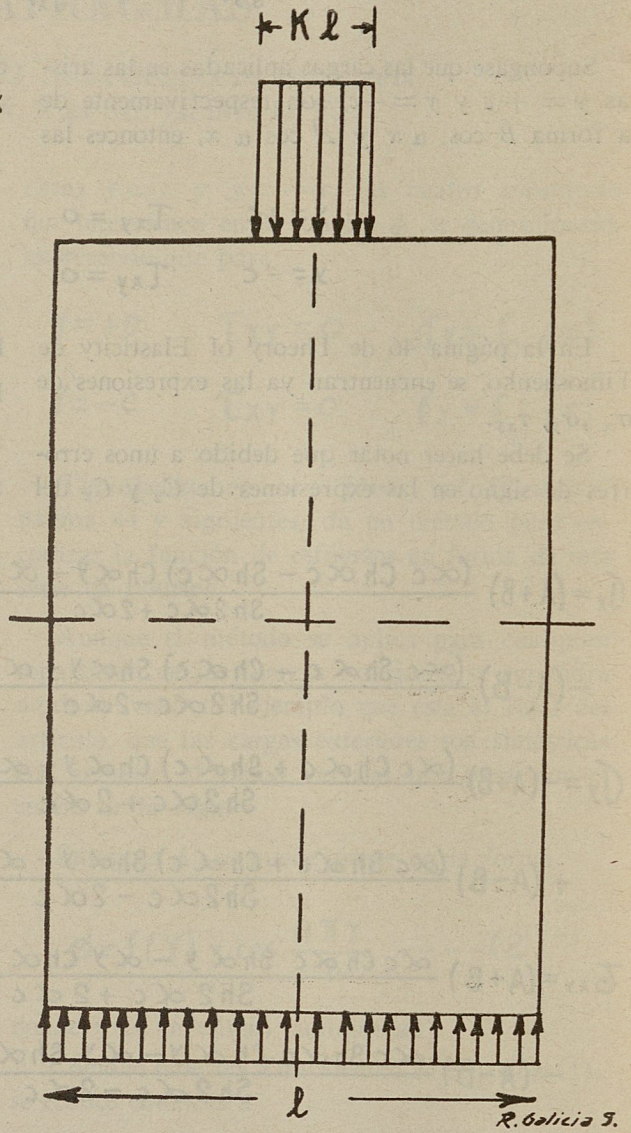


Fig. 2

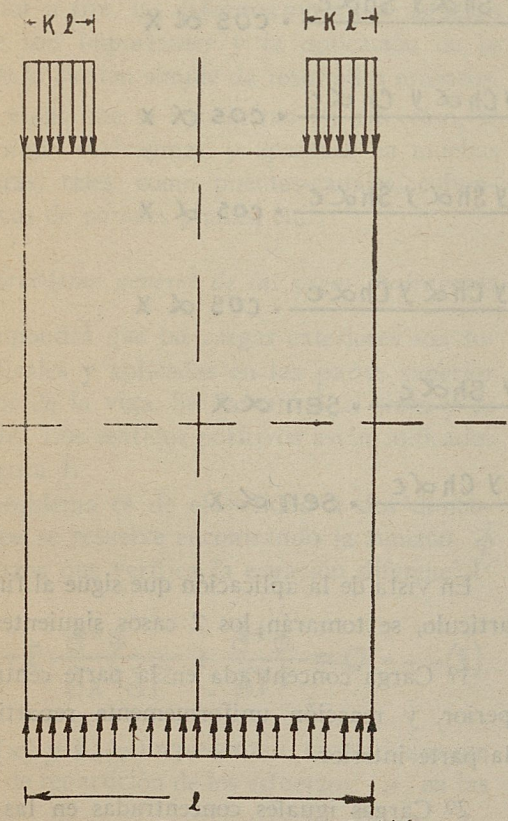


Fig. 3

a) *Primer caso*

Una carga concentrada no se puede descomponer en serie Fourier, pero en las aplicaciones la carga se reparte, en realidad, en una porción más o menos grande del claro.

Se considera la carga repartida en un tramo

$$\frac{1}{l} = \frac{4}{\pi l} \left(\cos \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cos \frac{n\pi x}{l} + \dots \right)$$

con n impar

La demostración se encuentra en el Memorándum Técnico Núm. 38 de la C. N. I., por Carlos Graef.

Kl del borde superior de la viga. Véase Fig. 2. Para una carga total unitaria, las ordenadas valdrán $1/Kl$. En el borde inferior la reacción se re-
 $1/l$.

El desarrollo de la carga inferior es:

Siguiendo el método indicado en el memorándum Núm. 38, el coeficiente del término general del desarrollo de la carga superior es:

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_{-\frac{\kappa\pi}{2}}^0 \frac{1}{\kappa l} \cos n \lambda d \lambda$$

La variable auxiliar $\lambda = \frac{\pi x}{l}$

$$a_n = \frac{4}{\pi \kappa l n} \left[\text{sen } n \lambda \right]_{-\frac{\kappa\pi}{2}}^0 = \frac{4}{\pi \kappa l n} \text{sen } \frac{n \kappa \pi}{2}$$

El término general para la carga superior será:

$$\frac{4}{\pi \kappa l n} \text{sen } \frac{n \kappa \pi}{2} \cos \frac{n \pi x}{l}$$

Los coeficientes de $\cos a x$, con $a = \frac{n\pi}{l}$ serán pues:

$$A_n = \frac{4}{\pi \kappa l n} \text{sen } \frac{n \kappa \pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, p, \quad \dots (7)$$

$$B_n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \times \frac{4}{\pi l}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, (2p+1), \quad \dots (8)$$

b). *Segundo caso*

Las cargas extremas se consideran repartidas en tramos Kl del borde superior de la viga. Véase Fig. 3. Para una carga total igual a l , en

cada extremo, las ordenadas serán $1/Kl$. En el borde inferior, la reacción se reparte uniformemente; la carga unitaria vale $2/l$.

El desarrollo de la carga inferior será:

$$\frac{2}{l} = \frac{8}{\pi l} \left(\cos \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cos \frac{n\pi x}{l} + \dots \right)$$

con n impar.

El coeficiente del término general de la carga superior será:

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + K\pi} \frac{1}{Kl} \cos n\lambda \, d\lambda$$

La variable auxiliar $\lambda = \frac{\pi x}{l}$

$$a_n = \frac{4}{\pi K l n} \left[\operatorname{sen} n\lambda \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + K\pi} = \frac{4}{K \pi l n} \left(\operatorname{sen} \frac{2K-1}{2} n\pi + \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} \right)$$

El término general para la carga superior será:

$$\frac{4}{K \pi l n} \left(\operatorname{sen} \frac{2K-1}{2} n\pi + \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{n\pi x}{l}$$

Los coeficientes de $\cos \alpha x$, con $\alpha = \frac{n\pi}{l}$ serán pues:

$$A_n = \frac{4}{\pi K l n} \left(\operatorname{sen} \frac{2K-1}{2} n\pi + \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots, p, \dots \quad (9)$$

$$B_n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \times \frac{8}{\pi l} \quad n = 1, 3, 5, \dots, (2p+1) \dots \quad (10)$$

Si, en lugar de $1/Kl$ la carga unitaria vale $\frac{P}{Kl}$ bastará multiplicar los coeficientes anteriores por P .

Las fórmulas (6) dan entonces los esfuerzos para cada término del desarrollo en serie de las cargas exteriores.

D. Aplicaciones al cálculo de los esfuerzos de las columnas del puente-canal del arroyo San Pedro

Las columnas de sección hueca son de concreto.

Las dimensiones generales están indicadas en las figuras 4a, 4b y 4c.

El puente transmite sus cargas en los puntos A, B, C y A', B', C' . Las cargas en A y A' , son iguales a P ; las cargas B, B', C, C' son iguales a Q .

La cimentación muy rígida transmite a la columna sus reacciones que se supondrán uniformemente repartidas a lo largo de las aristas de la base.

Se trata de encontrar la distribución de los esfuerzos en las columnas. A los diafragmas definidos por B, C y B', C' , se les llamará frontales; a los diafragmas definidos por BB', AA' y CC' , se les llamará laterales.

a). Repartición de las cargas entre diafragmas frontales y laterales

Debido a la continuidad del sistema, los desplazamientos verticales del punto A considerado como perteneciendo, por una parte, al diafragma BC y, por otra, al diafragma AA' , serán iguales. Lo mismo puede decirse de los puntos B y C , que pertenecen a dos diafragmas rectangulares.

Ahora bien, el puente transmite en A una carga P que se repartirá en p_1 tomada por el diafragma frontal BC y p_2 , tomada por el diafragma lateral AA' .

Del mismo modo, el puente transmite en cada punto B y C , una carga Q que se reparte q_1

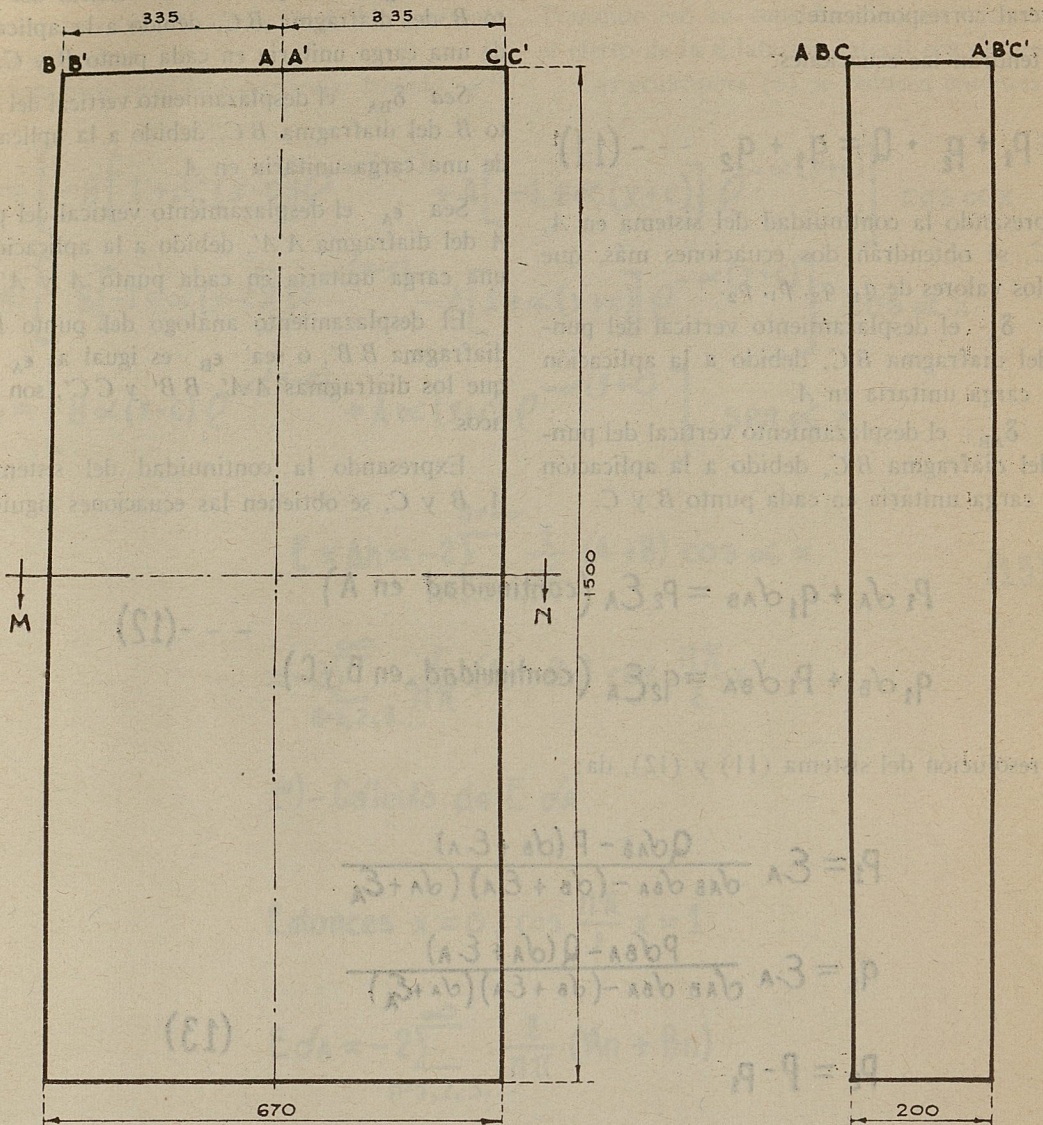
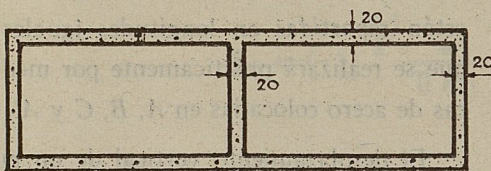


FIG 4a

FIG 4b



Sección M-N

FIG 4c

NOTA.- Acotaciones en centímetros.

(CALCULO DE VIGAS DIAFRAGMAS)

sobre el diafragma frontal y q_2 sobre el diafragma lateral correspondiente:

Se tendrán las ecuaciones:

$$P = p_1 + p_2 \cdot Q = q_1 + q_2 \quad \dots (11)$$

Expresando la continuidad del sistema en A , B , y C , se obtendrán dos ecuaciones más, que darán los valores de q_1 , q_2 , p_1 , p_2 .

Sea δ_A el desplazamiento vertical del punto A del diafragma BC , debido a la aplicación de una carga unitaria en A .

Sea δ_{AB} el desplazamiento vertical del punto A del diafragma BC , debido a la aplicación de una carga unitaria en cada punto B y C .

Sea δ_B el desplazamiento vertical del punto B del diafragma BC , debido a la aplicación de una carga unitaria en cada punto B y C .

Sea δ_{BA} el desplazamiento vertical del punto B del diafragma BC , debido a la aplicación de una carga unitaria en A .

Sea ϵ_A el desplazamiento vertical del punto A del diafragma $A A'$, debido a la aplicación de una carga unitaria en cada punto A y A' .

El desplazamiento análogo del punto B del diafragma $B B'$, o sea ϵ_B es igual a ϵ_A , ya que los diafragmas $A A'$, $B B'$ y $C C'$, son idénticos.

Expresando la continuidad del sistema en A , B y C , se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} P_1 \delta_A + q_1 \delta_{AB} &= P_2 \epsilon_A \quad (\text{continuidad en } A) \\ q_1 \delta_B + P_1 \delta_{BA} &= q_2 \epsilon_A \quad (\text{continuidad en } B \text{ y } C) \end{aligned} \quad \dots (12)$$

La resolución del sistema (11) y (12), da:

$$\begin{aligned} P_1 &= \epsilon_A \frac{Q \delta_{AB} - P (\delta_B + \epsilon_A)}{\delta_{AB} \delta_{BA} - (\delta_B + \epsilon_A) (\delta_A + \epsilon_A)} \\ q_1 &= \epsilon_A \frac{P \delta_{BA} - Q (\delta_A + \epsilon_A)}{\delta_{AB} \delta_{BA} - (\delta_B + \epsilon_A) (\delta_A + \epsilon_A)} \\ P_2 &= P - P_1 \end{aligned} \quad (13)$$

$$q_2 = Q - q_1$$

El problema se reduce a encontrar δ_A , δ_{AB} , δ_{BA} , δ_B y ϵ_A .

b). *Cálculo de las deformaciones debidas a sistemas de cargas unitarias*

Para utilizar los resultados de los párrafos B y C , se supondrá que las cargas p_1 , p_2 , q_1 , q_2 ,

están repartidas en longitudes iguales Kl , cosa que se realizará prácticamente por medio de placas de acero colocadas en A , B , C y A' , B' , C' .

El desplazamiento vertical de un punto cualquiera, tomado en una arista superior de la columna, será:

$$\Delta h = \frac{1}{E} \int_{-c}^{+c} (\sigma_y - \nu \sigma_x) dy$$

Siendo ν el módulo de Poisson.

Conociendo las expresiones de σ_y y σ_x por las ecuaciones (6), el cálculo de Δh no presenta mayor dificultad.

Ahora bien, en el caso particular tratado, $e^{-\alpha c}$

es despreciable delante $e^{\alpha c}$ a partir de $n=1$. Tomando eso en consideración, se encontró que el efecto de la dilatación lateral era despreciable.

Las ecuaciones (6) se reducen entonces a:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left[-B \left[1 + \alpha(y-c) \right] e^{\alpha(y-c)} + A \left[-1 + \alpha(y+c) \right] e^{-\alpha(y+c)} \right] \cos \alpha x \\ \sigma_y &= \left[B \left[-1 + \alpha(y-c) \right] e^{\alpha(y-c)} - A \left[1 + \alpha(y+c) \right] e^{-\alpha(y+c)} \right] \cos \alpha x \\ \tau_{xy} &= \left[B \alpha(y-c) e^{\alpha(y-c)} + A \alpha(y+c) e^{-\alpha(y+c)} \right] \sin \alpha x \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} E \times \Delta h &= -2 \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha} (A+B) \cos \alpha x \\ &= -2 \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{l}{n\pi} (A_n + B_n) \cos \frac{n\pi}{l} x \end{aligned} \quad (15)$$

1º) - Cálculo de $E \sigma_A$

Entonces $x=0$, $\cos \frac{n\pi}{l} x = 1$

$$E \sigma_A = -2 \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{l}{n\pi} (A_n + B_n)$$

$$\text{con } A_n = \frac{4}{\pi K l n} \operatorname{sen} \frac{\pi K}{2} n$$

$$B_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{4}{\pi l n}, \quad n \text{ impar}$$

$$B_n = 0 \quad \text{para } n \text{ par}$$

$$\text{de donde } E \sigma_A \cong - \left[\frac{8}{\pi^2 K} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{\pi K}{2} n + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^2} \right]$$

2º) Cálculo de $E \sigma_{AB} (x=0)$

$$E \sigma_{AB} = -2 \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{l}{n\pi} (A_n + B_n)$$

$$\cos A_n = \frac{4}{\pi k l n} \left(\operatorname{sen} \frac{2K-1}{2} \pi n + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} n \right)$$

$$B_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8}{\pi l n}, \quad n \text{ impar}$$

$$B_n = 0, \quad \text{para } n \text{ par}$$

de donde

$$E \sigma_{AB} \approx - \left[\frac{8}{\pi^2 K} \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{2K-1}{2} \pi n + \left(\frac{8}{\pi^2 K} + \frac{16}{\pi^2} \right) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^2} \right]$$

3º Cálculo de $E \delta_B$.

$$\text{Entonces } x = -\frac{1}{2} \cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{n\pi}{2}$$

$$\text{Si } n \text{ es non, } \cos \frac{n\pi}{2} = 0.$$

$$\text{Si } n \text{ es par, } \cos \frac{n\pi}{2} = (-1).$$

Basta considerar los términos de orden par, entonces:

$$B_n = 0 \text{ y}$$

$$E \sigma_B = -2 \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{l}{n\pi} A_n$$

$$\text{Con } A_n = \frac{8}{\pi k l n} \left[\operatorname{sen} \frac{2K-1}{2} \pi n + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} n \right]$$

Si se pone $n = 2p$

$$A_n = \frac{8}{2\pi k l p} \operatorname{sen} (2K-1) \pi p = (-1)^p \frac{4}{\pi k l p} \operatorname{sen} 2K\pi p$$

de donde:

$$E \sigma_B = - \frac{4}{\pi^2 K} \sum_{p=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{p^2} \operatorname{sen} 2K\pi p$$

4º Cálculo de $E \delta_{BA}$

Otra vez $x = -\frac{l}{2}$; interesan únicamente los términos de orden par y $B_n = 0$.

$$E \sigma_{BA} = -2 \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{l}{n\pi} A_n$$

$$\text{Con } A_n = \frac{4}{\pi K l n} \text{ sen } \frac{n \pi K}{2} = \frac{2}{\pi K l p} \text{ sen } p \pi K$$

de donde

$$E \delta_{BA} = - \frac{2}{\pi^2 K} \sum_{p=1,2,3,\dots}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p^2} \text{ sen } \pi K p$$

5º Cálculo de $E \epsilon_A$

Como la distancia Kl se tomará igual para todos los diafragmas, se debe tener en cuenta que, siendo l diferente para los diafragmas fron-

tales y laterales, el valor de K no es el mismo en ambos casos. Para el diafragma lateral se llamará K' y se tendrá de un modo análogo al cálculo de $E \delta_{AB}$:

$$E \epsilon_A = - \frac{4}{\pi^2 K'} \sum_{p=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{p^2} \text{ sen } 2 K' \pi p$$

6º Cálculo numérico de las deformaciones.

Se tomó $Kl = 20$ cm.

Como $l = 670$ cm. $K = \frac{2}{67}$

Se encontró entonces:

$$\sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ sen } \frac{\pi K}{2} n \cong + 0.1901 \dots$$

$$\sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ sen } \frac{2K-1}{2} n \pi \cong - 0.9456 \dots$$

$$\sum_{p=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{p^2} \text{ sen } 2K \pi p \cong + 0.5015 \dots$$

$$\sum_{p=1,2,3,\dots}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p^2} \text{ sen } K \pi p \cong - 0.06486 \dots$$

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^2} = + 0.91596$$

Para el diafragma lateral

$K'l = 20$ cm.

con $l = 200$ cm.

$$E \delta_{BA} = + 0.4403.$$

$$E \epsilon = - 3.7435.$$

de donde $K' = \frac{1}{10}$

$$\sum_{p=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{p^2} \text{ sen } 2 K' \pi p = + 0.9237$$

dando finalmente:

$$E \delta_A = - 5.9043.$$

$$E \delta_{AB} = - 0.6800.$$

$$E \delta_B = - 6.8089.$$

c). Cálculo de las cargas p_1, p_2, q_1, q_2 .

La carga total aplicada A , vale 79000 Kgs. Los diafragmas tienen todos el mismo espesor 20 cm. La carga P valdrá:

$$P = \frac{79000}{20} = 3950 \text{ Kgr./cm.}$$

La carga total aplicada en B , vale 57000 Kgs.

El valor de Q será:

$$Q = \frac{57000}{20} = 2850 \text{ Kgr./cm.}$$

GRAFICA DE VARIACIONES DE ESFUERZOS NORMALES σ_x Y σ_y EN DIAFRAGMA FRONTAL
 ESCALA DE LINEAS
 1:75

ESCALAS DE ESFUERZOS

PARA GRAFICAS σ_x
 0.33cm = 10 Kg/cm² Para Sección X=0
 Sección X=l/2
 Sección X=l/8
 " X=l/4
 " X=3l/8
 0.33cm = 1 Kg/cm² Para

PARA GRAFICA σ_y
 3.3cm = 10 Kg/cm² Para Sección y/c = -1
 Sección y/c = 7/8
 3.3cm = 1 Kg/cm² (Para todas las demas secciones.)

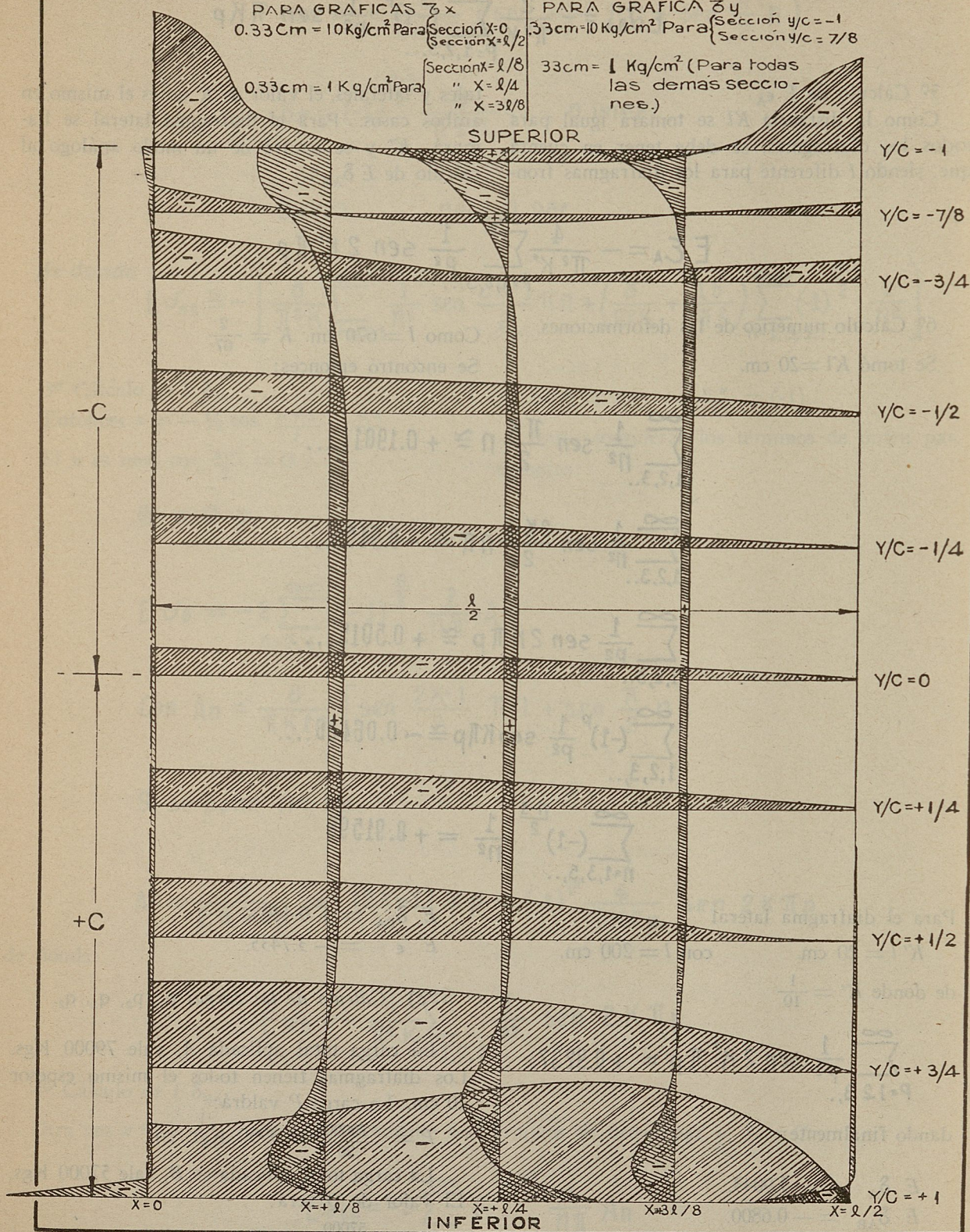


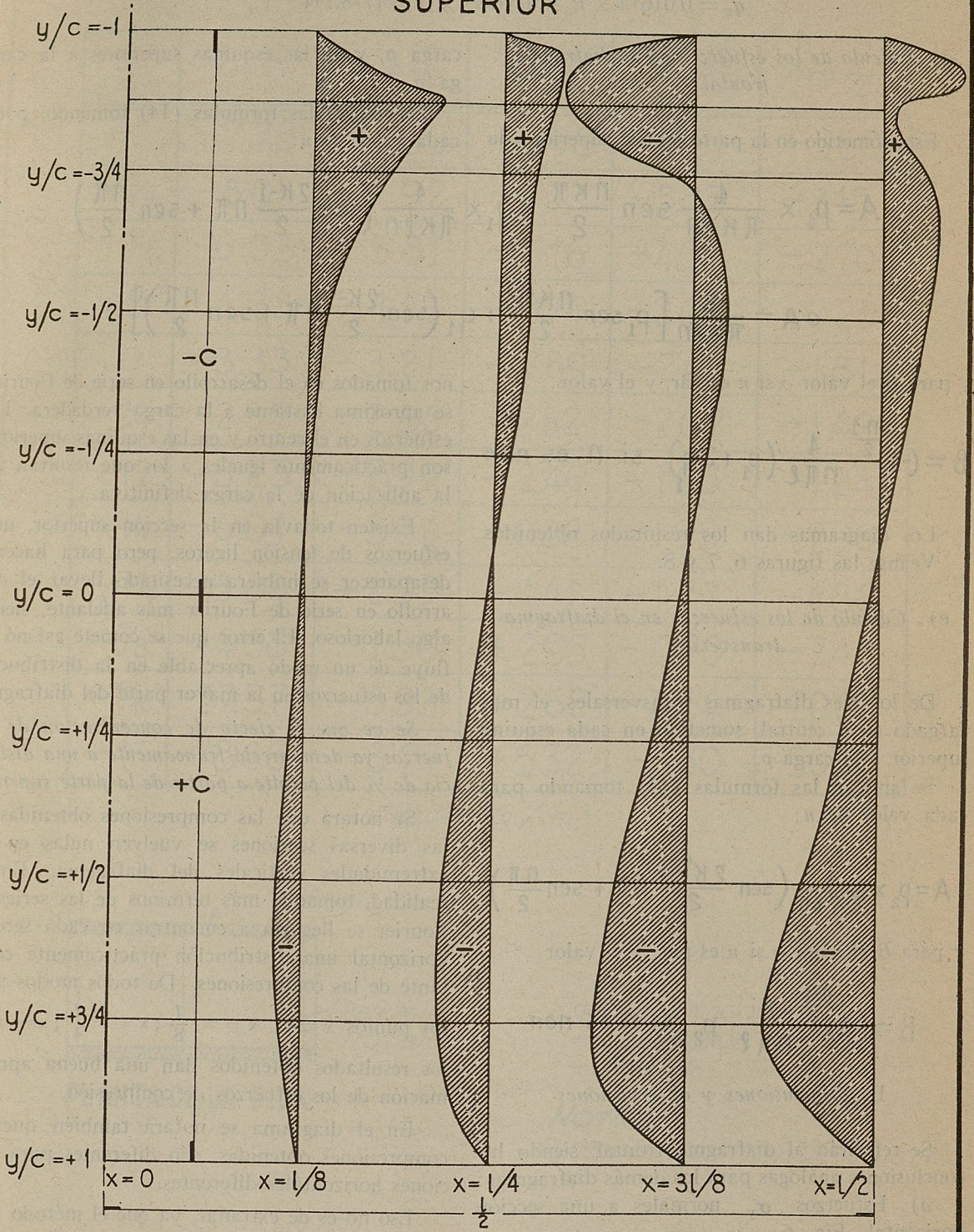
FIG. 6 y7

GRAFICA DE VARIACION DE " ζ_{xy} " EN DIAFRAGMA FRONTAL

ESCALA DE ESFUERZOS

.66 cm. = 1 Kg./cm²

SUPERIOR



INFERIOR

FIG. 8

Las ecuaciones (13), dan:

$$p_1 = 0.38688 \times P - 0.02393 \times Q = 1457.117 \text{ Kgr./cm.}$$

$$p_2 = 0.61312 \times P + 0.02493 \times Q = 2492.883 \quad ,,$$

$$q_1 = 0.01614 \times P + 0.35371 \times Q = 1071.846 \quad ,,$$

$$q_2 = 0.01614 \times P + 0.64629 \times Q = 1778.154 \quad ,,$$

d). *Cálculo de los esfuerzos en el diafragma..* carga p_1 y en las esquinas superiores a la carga q_1 .
frontal.

Está sometido en la parte central superior a la carga p_1 y en las esquinas superiores a la carga q_1 .
Se aplican las fórmulas (14) tomando, para cada valor de n :

$$A = p_1 \times \frac{4}{\pi k \ell n} \operatorname{sen} \frac{n k \pi}{2} + q_1 \times \frac{4}{\pi k \ell n} \left(\operatorname{sen} \frac{2k-1}{2} n \pi + \operatorname{sen} \frac{n \pi}{2} \right)$$

$$o A = \frac{4}{\pi k \ell n} \left[p_1 \operatorname{sen} \frac{n k \pi}{2} + q_1 \left(\operatorname{sen} \frac{2k-1}{2} n \pi + \operatorname{sen} \frac{n \pi}{2} \right) \right]$$

y para B el valor 0 si n es par, y el valor:

$$B = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{4}{n \pi \ell} (p_1 + 2q_1) \quad \text{si } n \text{ es non}$$

Los diagramas dan los resultados obtenidos. Véanse las figuras 6, 7 y 8.

e). *Cálculo de los esfuerzos en el diafragma transversal*

De los tres diafragmas transversales, el más cargado es el central, sometido en cada esquina superior a la carga p_2 .

Se aplican las fórmulas (14) tomando para cada valor de n :

$$A = p_2 \times \frac{4}{\pi k' \ell n} \left(\operatorname{sen} \frac{2k'-1}{2} n \pi + \operatorname{sen} \frac{n \pi}{2} \right)$$

y, para B el valor 0 si n es par, y el valor

$$B = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8}{n \pi \ell} p_2 \quad \text{si } n \text{ es non}$$

E. Conclusiones y observaciones

Se referirán al diafragma frontal, siendo las conclusiones análogas para los demás diafragmas:

a). Esfuerzos σ_y normales a una sección horizontal. Fig. 6.

En la figura correspondiente se ve que la línea de carga obtenida con el número de térmi-

nos tomados en el desarrollo en serie de Fourier, se aproxima bastante a la carga verdadera. Los esfuerzos en el centro y en las esquinas superiores son prácticamente iguales a los que resultan por la aplicación de la carga definitiva.

Existen todavía en la sección superior, unos esfuerzos de tensión ligeros, pero para hacerlos desaparecer se hubiera necesitado llevar el desarrollo en serie de Fourier más adelante, siendo algo laborioso. El error que se comete así no influye de un modo apreciable en la distribución de los esfuerzos en la mayor parte del diafragma.

Se ve que el efecto de concentración de esfuerzos ya desapareció francamente a una distancia de $\frac{1}{4}$ del peralte a partir de la parte superior.

Se notará que las compresiones obtenidas en las diversas secciones se vuelven nulas en las extremidades verticales del diafragma. En la realidad, tomando más términos de las series de Fourier se llegaría a encontrar en cada sección horizontal una distribución prácticamente constante de las compresiones. De todos modos para los puntos $x = 0$; $x = \pm \frac{l}{8}$; $x = \pm \frac{l}{4}$; $x = \pm \frac{3l}{8}$ los resultados obtenidos dan una buena aproximación de los esfuerzos de compresión.

En el diagrama se notará también que las compresiones obtenidas, son diferentes para secciones horizontales diferentes.

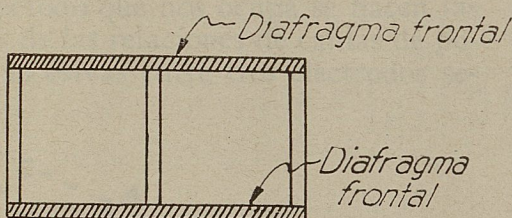
Eso no es de extrañar, ya que el método usado da esfuerzos cortantes a lo largo de las aristas verticales; véase Fig. 8 para $x = \frac{l}{2}$. Estos

σ_y TOTAL, CONSIDERANDO PESO PROPIO
EN DIAFRAGMA FRONTAL

FIG. 9

$\frac{y}{c}$	$x = 0$	$x = \frac{l}{8}$	$x = \frac{l}{4}$	$x = \frac{3l}{8}$	$x = \frac{l}{2}$
+1	-7.78	-8.60	-9.98	-9.91	-3.60
+3/4	-8.05	-7.92	-7.33	-5.87	-3.15
+1/2	-6.03	-5.81	-5.16	-4.07	-2.70
+1/4	-4.33	-4.18	-3.74	-3.06	-2.25
0	-3.33	-3.21	-2.89	-2.40	-1.81
-1/4	-2.97	-2.85	-2.52	-2.02	-1.42
-1/2	-3.25	-2.99	-2.46	-1.93	-1.24
-3/4	-6.01	-3.34	-0.88	-1.95	-2.96
-13/16	-8.69	-2.99	-1.41	-1.77	-4.88
-7/8	-14.68	-1.30	+2.95	-0.70	-7.48
-15/16	-37.57	-3.93	+2.62	-4.24	-20.02
-1	-78.66	-3.27	+5.32	+3.80	-50.95

Unidades: Kg./cm.²



PLANTA DE LA PILA

Signos convencionales
- Compresión
+ Tensión

NOTA:
 σ_y debida al peso propio = 0.24 h (h en mts)

esfuerzos cortantes son tomados por los diafragmas transversales. Se verificó en cada sección $y = \text{constante}$, que la suma de las cargas normales, más las debidas a los esfuerzos cortantes, era igual a la carga exterior aplicada.

En la Fig. 9 está la tabla de los esfuerzos σ_y en el diafragma frontal, tomando en cuenta los esfuerzos debidos al peso propio.

b). Esfuerzos σ_x normales a una sección vertical. Fig. 7.

El examen de la figura, muestra, en primer lugar, una fuerte discrepancia con el diagrama que se obtendría aplicando la teoría de la flexión. Esto era de esperar, ya que la teoría de la flexión simple es aplicable únicamente a vigas, cuya relación entre el claro y el peralte es grande.

Las concentraciones de esfuerzos se verifican prácticamente en el octavo superior, y en el octavo inferior del peralte.

Se verificó que en cada sección vertical la suma de las áreas negativas es igual a la suma de las áreas positivas, ya que la resultante normalmente a una sección vertical tiene que ser un par equivalente al momento flexionante.

c). Esfuerzos τ_{xy} —. Esfuerzos cortantes. Fig. 8.

Por las mismas razones expuestas en el inciso b) anterior, la distribución de los esfuerzos cortantes a lo largo de una vertical no se parece en nada a la parábola que se obtendría con una

viga ordinaria. Llegan a un valor casi nulo cerca de la mitad del peralte, en lugar de ser máximas como en el caso de una viga ordinaria.

Aun siendo pequeños, los esfuerzos cortantes máximos se producen también en el octavo superior e inferior del peralte.

d). Observaciones.

Para tipos de diafragmas de dimensiones análogas al estudiado, se ve que los refuerzos que se podrían necesitar deben encontrarse en el octavo superior y en el octavo inferior del peralte.

De un modo general, en cuanto a la dificultad del cálculo, se puede decir que si las cargas exteriores son bastante concentradas, las series de Fourier obtenidas son lentamente convergentes, lo que exige el cálculo de muchos términos, siendo algo laborioso aunque no difícil. En el cálculo anterior se tomaron 20 términos.

Si la carga está repartida en un tramo grande, o como era el caso aquí, para la arista inferior, si la carga es uniformemente repartida, 3 a 5 términos bastan para obtener una aproximación bastante buena.

A igualdad de sistema de carga exterior, el procedimiento de cálculo converge más rápidamente a medida que la viga se hace más del tipo diafragma, es decir a medida que se aumenta la relación del peralte al claro.

En la Fig. 9 están los esfuerzos σ_y tomando en cuenta el peso propio para el diafragma central transversal.

