Vol. I ANALES DEL INSTITUTO DE GEOFISICA 1955
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

TEORIA ESTADISTICA DE LAS RESPUESTAS SISMICAS*

Emilio Rosenblueth

RESUMEN

Expressions are developed in this paper which allow the prediction of the chances that a structure will fail during a given time interval (e.g., its life span) due to seismic action. The term "failure" is used in its broadest sense to denote a failure of the structure to behave as intended and includes excessively large oscillations, the formation of cracks, and the malfunctioning of installations as well as partial or total collapse. Application of the theory presupposes a knowledge of the statistical distribution of responses to earthquakes of given intensity and of the frequency distribution of seismic intensity in time. It is based on the assumption that the damage caused by one earthquake does not affect the resistance of the structure to subsequent ground motions. The results are applicable to all types of structural behavior, including inelasticity and damping.

* El presente trabajo forma parte de una investigación sobre diseño sísmico estructural - llevada a cabo por el Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, en cooperación con Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.

En la actualidad es imposible predecir las intensidades y características detalladas de los macrosismos futuros. En consecuencia el diseño sísmico excluye una filosofía de relaciones causales como la que predomina en el diseño estructural convencional para cargas verticales, y se hace necesaria la introducción de métodos estadísticos.

Se han hecho hasta la fecha varios esfuerzos encaminados a descubrir las distribuciones estadísticas de las respuestas de diversas estructuras a temblores cuya intensidad se supone conocida[1,2,3,4]. Suponiendo conocidas dichas distribuciones estadísticas nos proponemos deducir una expresión que permita predecir la probabilidad de que falle una estructura de resistencia dada, durante un intervalo determinado, al que denominaremos la "vida útil" de la estructura.

Conviene a esta altura introducir los siguientes símbolos.

R	= valor absoluto máximo de la respuesta estructural en cuestión (por ejemplo, velocidad o desplazamiento relativos al terreno, aceleración absoluta, esfuerzo, momento flexionante) cuando actúa un solo temblor.
R_1	= respuesta máxima en valor absoluto que puede sufrir la estructura en cuestión sin fallar; = resistencia de la estructura.
t	= tiempo.
f_{max}	= intensidad sísmica máxima de diseño.
$P_x(x_1)$	= probabilidad de que $x = x_1$.
$Q_x(x_1)$	= probabilidad de que $x \leqslant x_1$.
$q_x(x_1)$	= $dQ_x(x_1)/dx_1$.
$Q_{R,f}(R_1)$	= probabilidad de que $R \leqslant R_1$ cuando actúa un temblor de intensidad f; = probabilidad de que la estructura resista satisfactoriamente un temblor de intensidad f.
$P_{i,f,t}(i)$	= probabilidad de que ocurran justamente i temblores de intensidad f en el intervalo t.
$P_{i,f,t}(i \geqslant 1)$	= probabilidad de que ocurra por lo menos un temblor de intensidad f en intervalo t.
$Q_{R,f,t}(R_1)$	= probabilidad de que la estructura resista satisfactoriamente todos los temblores de intensidad f que ocurran en el intervalo t.
$Q_{R,t}(R_1)$	= probabilidad de que la estructura resista todos los temblores de intensidad $\leqslant f_{max}$ que ocurran en el intervalo t.

$E(x)$ = esperanza matemática de la variable x_i = límite al cual tiende la x promedio de un número de determinaciones de x cuando el número de ensayes tiende a infinito.

A pesar de repetidos esfuerzos encaminados hacia el descubrimiento de periodicidades en la ocurrencia de los movimientos teluricos, no se ha encontrado hasta la fecha ninguna regularidad. Mientras tales periodicidades no se establezcan definitivamente, será menester suponer que no existen, y que la distribución estadística de intensidades sísmicas depende sólo de la duración del intervalo considerado y no de la localización de dicho intervalo en el tiempo. Aún si se hiciera evidente una ligera tendencia a la periodicidad, las conclusiones basadas en la hipótesis anterior no sufrirían modificaciones importantes, pues los intervalos que interesan en la práctica -la vida útil de las estructuras que diseñamos- son demasiado largos para que se dejen sentir los efectos debidos a una ligera tendencia a la periodicidad.

Es sabido que inmediatamente después de un terremoto importante ocurre con frecuencia una cadena de sismos menores. En consecuencia las distribuciones estadísticas correspondientes a diversas intensidades no son rigurosamente independientes. Empero, los efectos de dicho fenómeno sólo afectarían el diseño de estructuras cuyas vidas útiles no excedieran a unas cuantas horas; por lo tanto no son dignos de tomarse en cuenta en la práctica.

En vista de las consideraciones anteriores está justificado concluir que los temblores de cada intensidad siguen la distribución de Poisson, la cual da probabilidades iguales de ocurrencia en tiempos iguales. También está justificado concluir que las distribuciones que corresponden a intensidades distintas son independientes. La distribución de Poisson se puede escribir simbólicamente en la forma:

$$P_{i,f,t}(i) = e^{-\lambda_f t} \frac{(\lambda_f t)^i}{i!} \tag{1}$$

en la que $\lambda_f(\text{seg}^{-1})$ es un parámetro que corresponde a la intensidad f.

La esperanza matemática de una variable, digamos x, puede calcularse[8] de acuerdo con la expresión:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} q_x(\xi)\, d\xi \qquad (2)$$

para variables continuas, y

$$E(x) = \sum_{n=1}^{N} x_n\, p_x(x_n) \qquad (2a)$$

para variables discretas, siendo N el número de valores que puede adoptar la variable x.

Por lo tanto la esperanza matemática del número de temblores de intensidad f, que ocurren en el intervalo t, es:

$$E(i) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_{n,f,t}(n)$$

$$= e^{-\lambda_f t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\lambda_f t)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda_f t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_f t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda_f t$$

$$= \lambda_f t .$$

Vemos que λ_f representa la esperanza matemática del número de temblores por unidad de tiempo.

La probabilidad de que ocurra por lo menos un temblor de intensidad f, en el intervalo t, vale:

$$P_{i,f,t}(i \geqslant 1) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{i,f,t}(i)$$

$$= 1 - e^{-\lambda_f t} \qquad (3)$$

Supondremos ahora conocida la distribución $q_{R,f}$ de las respuestas a un temblor de intensidad f. La probabilidad de que una estructura con resistencia R_1 resista satisfactoriamente por lo menos un solo temblor de intensidad f vale:

$$Q_{R,f}(R_1) = \int_o^{R_1} q_{R,f}(R)\ dR \quad . \tag{4}$$

(El límite inferior de la integral es cero pues $R_1 = 0$).

Deseamos conocer la probabilidad $Q_{R,f,t}(R_1)$ de que no falle la estructura en un intervalo de duración t cuando sólo pueden ocurrir sismos de intensidad f. Como un paso intermedio en la evaluación de dicha probabilidad consideremos la variable $z = \max(x_1, x_2)$, siendo x_1 y x_2 dos variables estocásticas independientes cualesquiera. Por definición de variables estocásticas independientes se tiene:

$$Q_z(z) = Q_{x_1}(z)\ Q_{x_2}(z) \quad .$$

En general, si $z = \max(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, obtendremos:

$$Q_z(z) = \prod_i Q_{x_i}(z) \quad . \tag{5}$$

En el caso que nos interesa, las variables x_i representan las respuestas máximas R a temblores individuales de intensidad f, y por lo tanto las x_i son idénticas. Deseamos conocer la probabilidad de que en un intervalo t no se exceda ni una sola vez la respuesta permisible R_1. Si supiéramos que ocurrirían exactamente i temblores en t, esta probabilidad podría evaluarse sustituyendo R por x_i y R_1 por z en la ecuación (5):

$$Q_{R,f,t}(R_1) = Q^i_{R,f}(R_1) \quad .$$

La probabilidad de que ocurran precisamente i temblores está definida por la ecuación (1), y el número de temblores puede variar entre cero e infinito.

Por lo tanto:

$$Q_{R,f,t}(R_1) = \sum_{i=0}^{\infty} Q^i_{R,f}(R_1)\ P_{i,f,t}(i)$$

$$= e^{-\lambda_f t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[\lambda_f t\, Q_{r,f}(R_i)]^i}{i!}$$

$$= \exp\{-\lambda_f T\,[1 - Q_{R,f}(R_1)]\} \qquad (6)$$

Con objeto de confirmar la validez de esta expresión notemos que,

1. Si $\lambda_f = 0$, es decir, si no ocurren temblores de intensidad f, la ecuación (6) se convierte en:

$$Q_{R,f,t}(R_1) = 1$$

y existe la certeza de que la estructura no fallará.

2. Si $t = 0$,

$$Q_{R,f,t}(R_1) = 1 \ .$$

3. Si $R_1 = 0$,

$$Q_{R,f,t}(R_1) = \exp[-\lambda_f\, T(1-0)] \ .$$

$$= e^{-\lambda_f t}$$

$$= 1 - P_{i,f,t}(i \geqslant t) \ ,$$

(ver la ecuación (3)); es decir, si la estructura falla con cualquier deformación, tiene tantas probabilidades de fallar como las probabilidades que hay de que ocurra por lo menos un temblor.

4. Si $R_1 = \infty$,

$$Q_{R,f}(R_1) \quad .$$

Por lo tanto,

$$Q_{R,f,t}\ (R_1) = 1 \quad ;$$

es decir, existe la certeza de que la estructura resiste los temblores del intervalo t.

Estas propiedades de la ecuación (6) concuerdan con relaciones que son evidentemente ciertas y confirman su validez.

Pasemos ahora a considerar la posibilidad de que ocurran temblores de cualquier intensidad. El criterio de diseño consistirá en limitar la probabilidad de que falle la estructura, haciendo caso omiso de los temblores cuya intensidad exceda un cierto límite superior, en vista de la futilidad de construir estructuras que resistan movimientos telúricos que destruyan toda la comarca.

Por simplicidad empezaremos con distribuciones discretas de intensidades sísmicas; en otras palabras, supondremos primeramente que sólo pueden tomar lugar temblores cuyas intensidades formen una serie finita de valores. Según la ecuación (5) podemos escribir:

$$Q_{R,t}(R_1) = \prod_n Q_{R,f_n,t}\ (R_1) \quad .$$

En esta ecuación $Q_{R,t}(R_1)$ representa la probabilidad de que una estructura con resistencia R_1 resista todos los temblores que ocurran en el intervalo t, y $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ representan las intensidades que pueden tener dichos temblores. Sustituyendo la ecuación (6) en esta expresión, encontramos:

$$Q_{R,t}(R_1) = \exp\{ -\sum_n \lambda_{f_n}\ t\ [1 - Q_{R,f_n}(R_1)] \} \quad . \qquad (7)$$

Al pasar a una distribución continua de intensidades los parámetros λ_f se tornan infinitamente pequeños. Conviene entonces introducir los nuevos parámetros Λ_f (en cm^{-1} si f está en cm/seg), definidos por la relación:

$$\lambda_f = \Lambda_f \, df \quad . \tag{8}$$

Así como se encontró que λ_f es igual a la esperanza matemática del número de temblores de intensidad f que ocurren por unidad de tiempo, se deduce de la definición de Λ_f que $\int_f^\infty \Lambda_f df$ es igual a la esperanza matemática del número de temblores con intensidad $\geqslant f$ que ocurren por unidad de tiempo.

Procediendo al límite, la ecuación (8) se convierte en:

$$Q_{R,t}(R_1) = \exp \{ -t \int_o^{f_{max}} \Lambda_f [1 - Q_{R,f}(R_1)] \, df \} \quad . \tag{9}$$

Conocidos t, $Q_{R,f}(R_1)$, f_{max} y Λ_f, esta expresión permite juzgar la probabilidad de falla en el intervalo t en comparación con el riesgo permisible de falla. No existe dificultad en extender la ecuación (9) a conceptos más refinados del criterio de probabilidades permisibles de falla. Por ejemplo, se pueden especificar las características dinámicas de la estructura, así como su resistencia, como distribuciones estadísticas que dependen de factores accidentales, y no como valores fijos conocidos con precisión como aquí se ha hecho; se puede también hacer estas cantidades, así como el riesgo permisible de falla, variables que dependen del tiempo, y se puede tomar en cuenta la acción debilitante de temblores sucesivos. Estas extensiones de la ecuación (9) y su aplicación a casos numéricos se difieren para otras publicaciones.

La aplicación de la ecuación (9) está indicada para el establecimiento de códigos de especificaciones en diversas zonas de la Tierra.

REFERENCIAS

1. G.W.Housner, "Characteristics of Strong-Motion Earthquakes", Bull.Seis.Soc. of Am., **37**, 1, pp. 19-31 (Ene. 1947).

2. G.W.Housner, "Analysis of Seismic Forces", manuscrito inédito (1950).

3. E.Rosenblueth, "A Basis for Aseismic Design of Structures", Tesis Doctoral, Univ. of Illinois (1951).

4. L.E.Doodman, E.Rosenblueth, and N.M.Newmark, "Aseismic design of Elastic Structures Founded on Firm Ground", Tech.Report to the Off. of Naval Res., C.Eng. Studies, Str.Res.Series. No. 26, Univ. of Illinois (Junio, 1952).

5. N.Arley and K.R.Buch, "Introduction to the Theory of Probability and Statistics", John Wiley and Sons, Inc., pp. 30-31 (1950).

6. N.Arley and K.R.Buch, Op.Cit., p. 59.