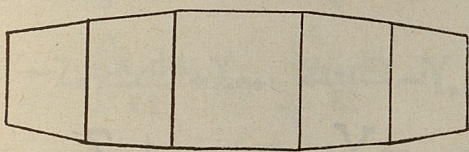
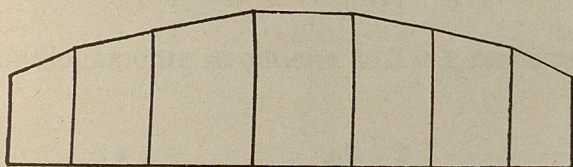
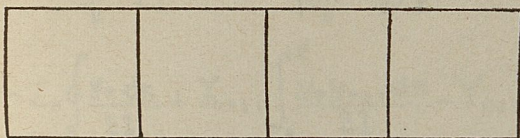


LAS VIGAS VIERENDEL

POR EL ING. PABLO H. *ARRIAGA SERMENT*

DEL DEPTO. DE PROYECTOS DE LA C. N. I.

Una estructura Vierendel está constituida por una cuerda superior, otra inferior y montantes. Las cuerdas pueden ser paralelas o curvas y los tableros iguales o de longitud variable, es pues, una hilera de bastidores o marcos.



La estructura tiene un grado de hiperestatismo de $3n$ siendo n el número de tableros. Ya que si imaginamos n cortes, uno en cada tablero, por comodidad, en la cuerda no cargada directamente (digamos en la superior, si se trata de un paso a través) tendremos que aplicar en cada corte dos sistemas de esfuerzos simétricos, constituidos por dos fuerzas perpendiculares entre sí y un momento, a fin de conservar la continuidad de la estructura.

Hay, pues, $3n$ incógnitas que se determinarán escribiendo $3n$ ecuaciones

que expresen que en cada corte no haya ningún desalojamiento relativo angular o lineal. Basta, pues, aplicar el teorema de Castigliano, que establece que "la derivada del trabajo de deformación con respecto a un esfuerzo, es igual al desalojamiento correspondiente de dicho esfuerzo". Como aquí se trata de esfuerzos hiperestáticos internos, los desalojamientos son nulos.

Para el tablero r tendremos, siendo X_r , Y_r y Z_r los esfuerzos hiperestáticos de él:

$$(1) \Delta x = \oint \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_r} ds = 0,$$

$$(2) \Delta y = \oint \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Y_r} ds = 0,$$

$$(3) \Delta \theta = \oint \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Z_r} ds = 0.$$

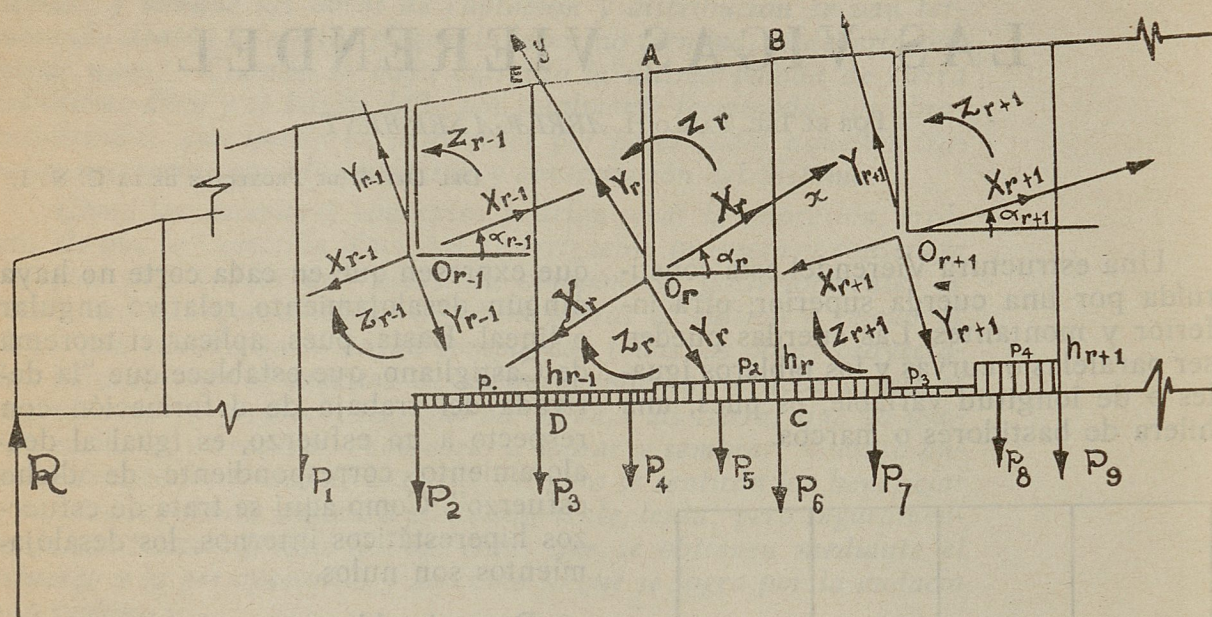
en que las integrales se toman a lo largo de todo el bastidor r .

Desarrollo de las ecuaciones

A fin de obtener un sistema de ecuaciones lo más sencillo posible, para facilitar su resolución, supongo barras per-

fectamente rígidas, sólidamente unidas a los cortes, en los extremos de las cuales aplico los esfuerzos hiperestáticos.

Sean tres tableros consecutivos: $r-1$, r y $r+1$ y las fuerzas a que está sujeto según muestra la figura.



Los momentos en el anillo BCDEB los considero positivos cuando producen tensión en su interior.

Así que:

$$M_{E-B} = -X_r y_r + Y_r x_r - Z_r.$$

$$M_{B-C} = -X_r y_r + Y_r x_r - Z_r + X_{r+1} y_{r+1} - Y_{r+1} x_{r+1} + Z_{r+1}$$

$$M_{C-D} = -X_r y_r + Y_r x_r - Z_r - M_i.$$

$$M_{D-E} = -X_r y_r + Y_r x_r - Z_r + X_{r-1} y_{r-1} - Y_{r-1} x_{r-1} + Z_{r-1}$$

M_i es el momento en la viga libremente apoyada de todo el puente, para el punto que se tome en el tramo C—D.

Por consiguiente:

$$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}_r} = -y_r, \quad \frac{\partial M}{\partial \bar{Y}_r} = x_r, \quad \frac{\partial M}{\partial \bar{Z}_r} = -1.$$

Luego, la ecuación (1) es:

$$\begin{aligned} -\Delta x = & -\oint \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{X}_r} ds = \oint \frac{(-X_r y_r^2 + Y_r x_r y_r - Z_r y_r)}{EI} ds + \\ & + \int_B^c \frac{(X_{r+1} y_r y_{r+1} - Y_{r+1} x_{r+1} y_r + Z_{r+1} y_r)}{EI} ds + \int_0^E \frac{(X_{r-1} y_r - y_r - Y_{r-1} x_{r-1} y_r + Z_{r-1} y_r)}{EI} ds \\ & - \int_c^D \frac{M_i y_r}{EI} ds = 0, \text{ que se puede escribir:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & X_{r-1} \int_0^E \frac{y_r - y_r ds}{EI} - Y_{r-1} \int_0^E \frac{x_r - y_r ds}{EI} + Z_{r-1} \int_0^E \frac{y_r ds}{EI} - X_r \oint \frac{y_r^2 ds}{EI} + Y_r \oint \frac{x_r y_r ds}{EI} \\ & - Z_r \oint \frac{y_r ds}{EI} + X_{r+1} \int_B^c \frac{y_r y_{r+1} ds}{EI} - Y_{r+1} \int_B^c \frac{x_{r+1} y_r ds}{EI} + Z_{r+1} \int_B^c \frac{y_r ds}{EI} - \int_c^D \frac{M_i y_r ds}{EI} = 0 \dots (I) \end{aligned}$$

análogamente se obtiene de 2 y 3, respectivamente.

$$\begin{aligned} & X_{r-1} \int_0^E \frac{x_r y_{r-1} ds}{EI} - Y_{r-1} \int_0^E \frac{x_{r-1} x_r ds}{EI} + Z_{r-1} \int_0^E \frac{x_r ds}{EI} - X_r \oint \frac{x_r y_r ds}{EI} + Y_r \oint \frac{x_r^2 ds}{EI} \\ & - Z_r \oint \frac{x_r ds}{EI} + X_{r+1} \int_B^c \frac{y_{r+1} ds}{EI} - Y_{r+1} \int_B^c \frac{x_r x_{r+1} ds}{EI} + Z_{r+1} \int_B^c \frac{x_r ds}{EI} - \int_c^D \frac{M_i x_r ds}{EI} = 0 \dots (II) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & X_{r-1} \int_0^E \frac{y_{r-1} ds}{EI} - Y_{r-1} \int_0^E \frac{x_{r-1} ds}{EI} + Z_{r-1} \int_0^E \frac{ds}{EI} - X_r \oint \frac{y_r ds}{EI} + Y_r \oint \frac{x_r ds}{EI} - Z_r \oint \frac{ds}{EI} + \\ & + X_{r+1} \int_B^c \frac{y_{r+1} ds}{EI} - Y_{r+1} \int_B^c \frac{x_{r+1} ds}{EI} + Z_{r+1} \int_B^c \frac{ds}{EI} - \int_c^D \frac{M_i ds}{EI} = 0 \dots (III) \end{aligned}$$

Sistema de tres ecuaciones para el el problema está resuelto teóricamente. tablero r que contiene los esfuerzos hiperestáticos de tres tableros consecutivos únicamente. Para cada tablero se escriben ecuaciones análogas, con lo que

Observación: No se tomaron en consideración los efectos de los esfuerzos directos (tensión o compresión) y corrientes, como suele hacerse comúnmente.

Los coeficientes principales:

$$\oint \frac{ds}{EI}, \oint \frac{x ds}{EI}, \oint \frac{y ds}{EI}, \oint \frac{xy ds}{EI}, \oint \frac{x^2 ds}{EI}, \oint \frac{y^2 ds}{EI},$$

tienen una significación geométrica muy simple: son el área, momentos estáticos y de inercia de la sección análoga del anillo (o zapata equivalente), cuya anchura es $\frac{1}{EI}$.

las integrales de B a C del tablero r y los coeficientes **anteriores** o integrales de D a E, para el tablero $r + 1$, son integrales tomadas en el mismo montante r .

Si se escriben ordenadamente los cuadros de tales coeficientes se tiene:

$$\int_B^C \frac{y_r y_{r+1} ds}{EI}, - \int_B^C \frac{x_{r+1} y_r ds}{EI}, \int_B^C \frac{y_r ds}{EI}$$

COEFICIENTES POSTERIORES PARA EL TABLERO r :

$$\int_B^C \frac{x_r y_{r+1} ds}{EI}, - \int_B^C \frac{x_r x_{r+1} ds}{EI}, \int_B^C \frac{x_r ds}{EI}$$

$$\int_B^C \frac{y_{r+1} ds}{EI}, - \int_B^C \frac{x_{r+1} ds}{EI}, \int_B^C \frac{ds}{EI},$$

$$\int_{D=C}^{E=B} \frac{y_r y_{r+1} ds}{EI}, - * \int_{D=C}^{E=B} \frac{x_r y_{r+1} ds}{EI}, \int_{D=C}^{E=B} \frac{y_{r+1} ds}{EI}$$

COEFICIENTES ANTERIORES PARA EL TABLERO $r + 1$:

$$* \int_D^E \frac{x_{r+1} y_r ds}{EI}, - \int_D^E \frac{x_r x_{r+1} ds}{EI}, * \int_D^E \frac{x_{r+1} ds}{EI}$$

$$\int_D^E \frac{y_r ds}{EI}, * \int_D^E \frac{x_r ds}{EI}, \int_D^E \frac{ds}{EI}$$

* NOTESE EL CAMBIO DE SIGNO RESPECTO AL DEL PRIMER CUADRO.

Como ds es esencialmente positiva, el signo de las integrales no cambia al invertir los límites.

Se ve que las columnas o líneas pasan a líneas o columnas, cambiando de signo el término medio de las columnas y líneas externas.

Esto facilita las escrituras de las ecuaciones, pues para el primer tablero los coeficientes anteriores son nulos, y so-

lamente se calculan los posteriores sucesivamente en $\frac{n}{2}$ o $\frac{n+1}{2}$ tableros.

Evaluación de los coeficientes posteriores.

Como E , generalmente es constante, lo suprimo.

A I lo considero constante en toda la longitud de un montante o trozo de cuerda superior o inferior.

Así, pues:

$$\int_B^d \frac{ds}{I} = \frac{h_r}{I}$$

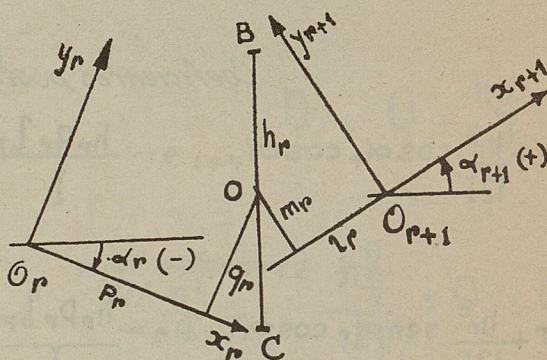
(I del montante r :)

$$\int_B^d \frac{x_r ds}{EI} = \frac{h_r P_r}{I}$$

$$\int_B^d \frac{y_r ds}{I} = \frac{h_r q_r}{I}$$

$$\int_B^d \frac{x_{r+1} ds}{I} = \frac{h_r l_r}{I}, \quad \int_B^d \frac{y_{r+1} ds}{I} = \frac{h_r m_r}{I}$$

O punto medio del montante.



$$\int_B^d \frac{x_r x_{r+1} ds}{I} = \frac{h_r p_r l_r}{I} + \frac{h_r^3}{12I} \sin \alpha_r \sin \alpha_{r+1} = \frac{h_r P_r l_r}{I} + \frac{h_r^3}{12I} \sin \alpha_r \sin \alpha_{r+1}$$

$$\int_B^d \frac{y_r y_{r+1} ds}{I} = \frac{h_r q_r m_r}{I} + \frac{h_r^3}{12I} \cos \alpha_r \cos \alpha_{r+1} = \frac{h_r q_r m_r}{I} + \frac{h_r^3}{12I} \cos \alpha_r \cos \alpha_{r+1}$$

$$\int_B^d \frac{x_r y_{r+1} ds}{I} = \frac{h_r p_r m_r}{I} + \frac{h_r^3}{12I} \sin \alpha_r \cos \alpha_{r+1} = \frac{h_r P_r m_r}{I} + \frac{h_r^3}{12I} \sin \alpha_r \cos \alpha_{r+1}$$

$$\int_B^d \frac{x_{r+1} y_r ds}{I} = \frac{h_r l_r q_r}{I} + \frac{h_r^3}{12I} \cos \alpha_r \sin \alpha_{r+1} = \frac{h_r l_r q_r}{I} + \frac{h_r^3}{12I} \cos \alpha_r \sin \alpha_{r+1}$$

Los cuadros de coeficientes que setienen que calcular para el tablero r son:

Coeficientes principales.

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint \frac{y^2 ds}{I}, \oint \frac{xy ds}{I}, -\oint \frac{y ds}{I} \\ -\oint \frac{xy ds}{I}, \oint \frac{x^2 ds}{I}, -\oint \frac{x ds}{I} \\ -\oint \frac{y ds}{I}, \oint \frac{x ds}{I}, -\oint \frac{ds}{I} \end{array} \right.$$

(Seis valores distintos.)

Coeficientes posteriores :

$$\frac{h_r q_r m_r}{I} + \frac{h_r^3}{12I} \cos \alpha_r \cos \alpha_{r+1}, -\frac{h_r q_r l_r}{I} - \frac{h_r^3}{12I} \cos \alpha_r \sin \alpha_{r+1}, \frac{h_r q_r}{I}$$

$$\frac{h_r p_r m_r}{I} + \frac{h_r^3}{12I} \sin \alpha_r \cos \alpha_{r+1}, -\frac{h_r p_r l_r}{I} - \frac{h_r^3}{12I} \sin \alpha_r \sin \alpha_{r+1}, \frac{h_r p_r}{I}$$

$$\frac{h_r m_r}{I}, \frac{h_r l_r}{I}, \frac{h_r}{I}$$

Nota: Obsérvese la simetría de los coeficientes principales que también aparece en algunos coeficientes de la solución.

Los determinantes de los coeficientes posteriores y anteriores son idénticamente nulos.

Elección de O_r e inclinación de los ejes.—Si tomo para O_r el centro de gravedad de la sección análoga y los ejes coincidiendo con los principales de inercia, entonces son nulos:

$$\oint \frac{x ds}{I}, \oint \frac{y ds}{I} \text{ y } \oint \frac{xy ds}{I}$$

Pero esto no simplifica mucho las ecuaciones y los cálculos son más complicados y largos; en cambio, si tomo todos los ejes X horizontales y hago coincidir O_r con O centro del montante r , los coeficientes posteriores se vuelven nulos en gran parte y quedan, ya que:

$$q_r = p_r = 0, l_r = -S_r, m_r = \frac{1}{2} (h_r - h_{r+1})$$

Coefficientes posteriores del tablero r: número par de tableros entonces hay un montante central, cuyo centro será origen de dos sistemas de ejes, desapareciendo en las ecuaciones de los tableros $\frac{n}{2}$, más coeficientes, en efecto:

$$\frac{h_r^3}{12I}, 0, 0$$

$$0, 0, 0$$

$$p_r = q_r = 0, \quad l_r = m_r = 0$$

$$\frac{h_r(h_r - h_{r+1})}{2I}, \frac{h_r s_r}{I}, \frac{h_r}{I}$$

y los coeficientes posteriores de $\frac{n}{2}$ son:

$$\frac{h_{\frac{n}{2}}^3}{12I}, 0, 0$$

$$0, 0, 0$$

por tanto, los coeficientes anteriores del tablero $r + 1$ son:

$$\frac{h_r^3}{12I}, 0, \frac{h_r(h_{r+1} - h_r)}{2I}$$

$$0, 0, \frac{h_{\frac{n}{2}}}{I}$$

$$0, 0, -\frac{h_r s_r}{I}$$

y los anteriores del $\frac{n}{2}$:

$$\frac{h_{\frac{n}{2}}^3}{12I}, 0, 0$$

$$0, 0, \frac{h_r}{I}$$

$$0, 0, 0$$

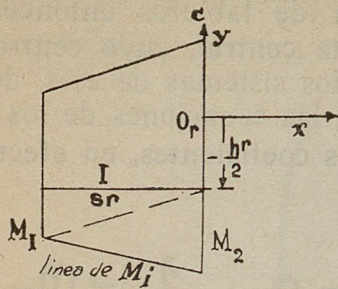
Con lo que desaparecen de cada sistema de tres ecuaciones, diez coeficientes, reduciendo considerablemente los cálculos. Cuando la estructura tiene un

$$0, 0, \frac{h_{\frac{n}{2}}}{I}$$

Constantes de carga

Para mayor facilidad en la escritura las designaré como sigue:

$$-\int_c^D \frac{M_i y_r ds}{I} = m_{rx}, \quad -\int_c^D \frac{M_i x_r ds}{I} = m_{ry}, \quad -\int_c^D \frac{M_i ds}{I} = m_r$$



PARA UNA CARGA CONCENTRADA EN UN NODO, LAS CONSTANTES VALEN :

$$m_p = -\frac{(M_1 + M_2) s_r}{2I}$$

$$m_{rx} = \frac{-h_r}{2} x - \frac{(M_1 + M_2) s_r}{2I} = \frac{h_r s_r (M_1 + M_2)}{4I} = \frac{h_r m_p}{2}$$

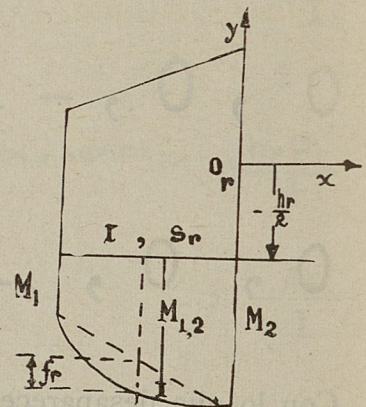
$$m_{ry} = -\frac{1}{I} \left[\frac{s_r M_1}{2} x - \frac{2}{3} s_r + \frac{s_r M_2}{2} x - \frac{s_r}{3} \right] = \frac{s_r^2 (2M_1 + M_2)}{6I}$$

M_1 y M_2 son los momentos en los nodos del tablero r de la viga libremente apoyada de todo el puente, para el estado de carga que se considere.

Carga repartida uniformemente en toda la longitud del puente.

$$f_r = M_{1,2} - \frac{1}{2} (M_1 + M_2) = \frac{w s_r^2}{8}$$

$$m_p = -\frac{s_r}{I} (M_{1,2} - \frac{f_r}{3}) = -\frac{s_r (M_{1,2} - \frac{f_r}{3})}{I}$$



$$m_{rx} = -\frac{h_r}{2} m_p = \frac{h_r s_r (M_{1,2} - \frac{f_r}{3})}{2I}$$

$$m_{ry} = -\frac{1}{I} \left[\frac{s_r M_1}{2} x - \frac{2}{3} + \frac{s_r M_2}{2} x - \frac{s_r}{3} + \frac{2}{3} s_r f_r x - \frac{s_r}{2} \right] = \frac{s_r^2 (2M_1 + M_2 + 2f_r)}{6I}$$

Siendo M_1 , M_2 y $M_{1,2}$ los momentos en los nodos y punto medio del tablero r producidos por la carga uniformemente repartida.

Momentos producidos por diferencias de temperaturas

El único caso que considero es aquel en el que se produce una diferencia de temperatura Δt , entre la cuerda superior e inferior, originando en la cuerda superior un alargamiento o acortamiento relativo, que engendra esfuerzos en la estructura que se trata de calcular. Imagínese que después de hacer el corte en el tablero r , se produce la diferencia de temperatura Δt (positiva si sube) que origina un alargamiento $\lambda \Delta t S_r$ (siendo λ el coeficiente de dilatación) y que éste puede efectuarse, digamos por traslape de los extremos del corte, entonces, para conservar la continuidad de la estructura, los esfuerzos hiperestáticos inducidos serán tales que produzcan desalojamientos contrarios, así que:

$$\Delta x = - \oint \frac{M y_r}{EI} = - \lambda S_r \Delta t.$$

$$\Delta y = - \oint \frac{M x_r}{EI} = - \lambda (h_{r+1} - h_r) \Delta t$$

$$\Delta \theta = - \oint \frac{M ds}{EI} = 0$$

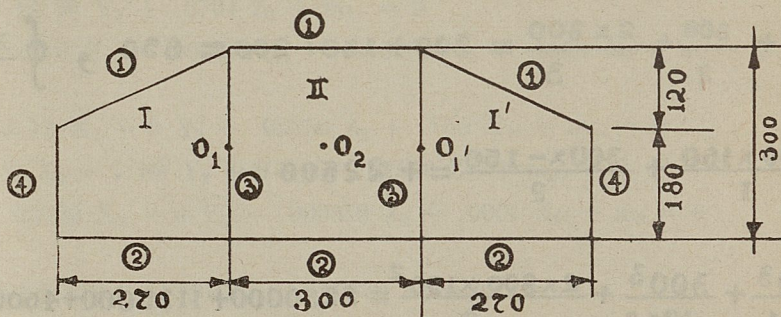
Es decir, que los esfuerzos por temperatura se deben calcular como si las constantes de carga fueran respectivamente:

$$m_{rx} = - \lambda S_r E \Delta t.$$

$$m_{ry} = - \lambda (h_r - h_{r+1}) E \Delta t$$

$$m_r = 0$$

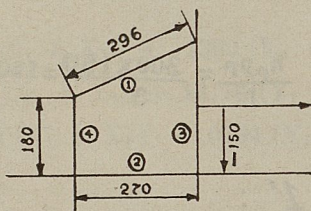
Ejemplo de cálculo.—Sea la estructura de la figura adjunta en la que los números en círculos son los



valores relativos de los momentos de inercia.

Cálculo de los coeficientes principales y posteriores del primer tablero.

PRIMER
TABLERO:



$$P_r = q_r = 0.$$

$$m_r = 0.$$

$$I_r = -150.$$

$$\oint \frac{ds}{1} = \frac{300}{3} + \frac{270}{2} + \frac{180}{4} + \frac{296}{1} = 100 + 135 + 45 + 296 = 576$$

$$\oint \frac{x ds}{I} = \frac{270 - 135}{2} + \frac{180 - 270}{4} + \frac{296 - 125}{1} = -18200 - 12150 - 40000 = -70350$$

$$\oint \frac{y ds}{I} = \frac{270 - 150}{2} + \frac{180 - 60}{4} + \frac{296 \times 90}{1} = -20200 - 2700 + 26600 = +3700$$

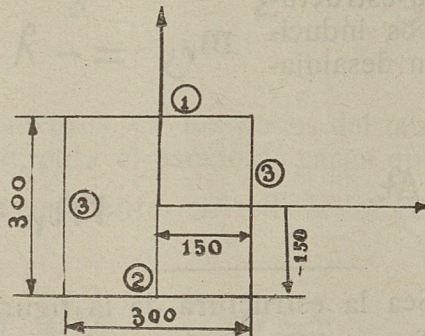
$$\oint \frac{x^2 ds}{I} = \frac{270^3}{3 \times 2} + \frac{180 \times 270^2}{4} + \frac{296 \times 270^2}{3 \times 1} = 3280000 + 3280000 + 7200000 = 13760000$$

$$\oint \frac{y^2 ds}{I} = \frac{270 \times 150^2}{2} + \frac{\frac{180}{12} + 180 \times 60^2}{4} + \frac{\frac{296 \times 120^2}{12} + 296 \times 90^2}{1} + \frac{300^3}{12 \times 3} = \frac{3040000 + 284000 + 2755000}{+750000} = 6830000$$

$$\oint \frac{xy ds}{I} = \frac{270 - 135 - 150}{2} + \frac{180 \times -270 \times -60}{4} + \frac{296 \times -135 \times 90}{1} = \frac{2735000 + 729000 - 3600000}{136000}$$

$$\frac{h_3}{12I} = \frac{300^3}{12 \times 3} = 750000, \quad -\frac{h_r l_r}{I} = -\frac{300 \times -150}{3}, \quad \frac{h_r}{I} = \frac{300}{3} = 100$$

SEGUNDO
TABLERO:



$$q_r = 0$$

$$p_r = +150$$

$$l_r = m_r = 0$$

$$\oint \frac{ds}{I} = \frac{300}{1} + \frac{300}{2} + \frac{2 \times 300}{3} = 300 + 150 + 200 = 650, \quad \oint \frac{x ds}{I} = 0$$

$$\oint \frac{y ds}{I} = \frac{300 \times 150}{1} + \frac{300 \times -150}{2} = +22500$$

$$\oint \frac{x^2 ds}{I} = \frac{300^3}{12 \times 1} + \frac{300^3}{12 \times 2} + \frac{2 \times 300 \times 150^2}{3} = 2250000 + 1125000 + 4500000 = 7875000$$

$$\oint \frac{y^2 ds}{I} = \frac{300 \times 150^2}{1} + \frac{300 \times 150^2}{2} + \frac{2 \times 300^2}{12 \times 3} = 675000 + 3375000 + 5000 = 10130000$$

$$\oint \frac{xy ds}{I} = 0, \quad \frac{h_3}{12I} = \frac{300^3}{12 \times 3} = 750000, \quad \frac{h_r p_r}{I} = \frac{300 \times 150}{3} = 150000, \quad \frac{h_r}{I} = \frac{300}{3} = 100$$

TABLERO 1' :

$$\oint \frac{ds}{I} = 576, \quad \oint \frac{x ds}{I} = -(-70350) = 70350, \quad \oint \frac{y ds}{I} = 3700, \quad \oint \frac{x^2 ds}{I} = 3.760,000,$$

$$\oint \frac{y^2 ds}{I} = 6.830000, \quad \oint \frac{xy ds}{I} = -(-136000) = 136000.$$

Así las ecuaciones son:

1er. Tablero.

$$\begin{aligned} - 6\,830\,000 X_1 - 136\,000 Y_1 - 3\,700 Z_1 + 750\,000 X_2 + m_{1x} &= 0 \\ + 136\,000 X_1 + 13\,760\,000 Y_1 + 70\,350 Z_1 + m_{1y} &= 0 \\ - 3\,700 X_1 - 70\,350 Y_1 - 576 Z_1 + 15\,000 Y_2 + 100 Z_2 + m_1 &= 0 \end{aligned}$$

2o. Tablero.

$$\begin{aligned} 750\,000 X_1 - 10\,130\,000 X_2 + 0 Y_2 - 22\,500 Z_2 + 750\,000 X_1 + m_{2x} &= 0 \\ - 15\,000 Z_1 - 0 X_2 + 7\,875\,000 Y_2 + 0 Z_2 + 15\,000 Z_{1'} + m_{2y} &= 0 \\ 100 Z_1 - 22\,500 X_2 - 0 Y_2 - 650 Z_2 + 100 Z_{1'} + m_2 &= 0 \end{aligned}$$

Tablero 1'.

$$\begin{aligned} 750\,000 X_2 - 6\,830\,000 X_{1'} + 136\,000 Y_{1'} - 3\,700 Z_{1'} + m_{1'x} &= 0 \\ - 136\,000 X_{1'} + 13\,760\,000 Y_{1'} - 70\,350 Z_{1'} + m_{1'y} &= 0 \\ - 15\,000 Y_2 + 100 Z_2 - 3\,700 X_{1'} + 70\,350 Y_{1'} - 5\,762 Z_{1'} + m_{1'} &= 0 \end{aligned}$$

Dividiendo todo por 10^6 se tiene:

$$\begin{aligned} - 6.83 X_1 - .1369 Y_1 - .00370 Z_1 + .750 X_2 + m_{1x} &= 0 & (1) \\ + .1360 X_1 + 13.76 Y_1 + .0704 Z_1 + m_{1y} &= 0 & (2) \\ - .00370 X_1 - .070 Y_1 - .000576 Z_1 + .015000 Y_2 + .0001 Z_2 + m_1 &= 0 & (3) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{I} \end{array}$$

$$\begin{aligned} + .750 X_1 - 10.13 X_2 + 0 Y_2 - .02250 Z_2 + .750 X_{1'} + m_{2x} &= 0 \\ - .01500 Z_1 - 0 X_2 + 7.88 Y_2 + 0 Z_2 + .01500 Z_{1'} + m_{2y} &= 0 \\ .0001 Z_1 - .02250 X_2 - 0 Y_2 - .000650 Z_2 + .0001 Z_{1'} + m_2 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{II} \end{array}$$

$$\begin{aligned} + .750 X_2 - 6.83 X_{1'} + .1360 Y_{1'} - .00370 Z_1 + m_{1'x} &= 0 & (1)' \\ - .136 X_{1'} + 13.76 Y_{1'} - .0704 Z_{1'} + m_{1'y} &= 0 & (2)' \\ - .0150 Y_2 + .0001 Z_2 - .00370 X_{1'} + .0704 Y_{1'} - .000576 Z_{1'} + m_{1'} &= 0 & (3)' \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{I}' \end{array}$$

Combinando las ecuaciones como sigue, se tiene:

$$\begin{aligned} (1) + (1)' - 6.83 (X_1 + X_{1'}) + .1360 (Y_1 - Y_{1'}) - .00370 (Z_1 + Z_{1'}) + m_{1x} + m_{1'x} &= 0 \\ (2) - (2)' + .1360 (X_1 + X_{1'}) + 13.76 (Y_1 - Y_{1'}) + .0704 (Z_1 + Z_{1'}) + m_{1y} - m_{1'y} &= 0 \\ (3) + (3)' - .00370 (X_1 + X_{1'}) - .0704 (Y_1 - Y_{1'}) - .000576 (Z_1 + Z_{1'}) + .0002 Z_2 \\ &+ m_1 + m_{1'} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} .750 (X_1 + X_{1'}) - 10.13 X_2 + 0 Y_2 - .02250 Z_2 + m_{2x} &= 0 \\ - .0150 (Z_1 - Z_{1'}) - 0 X_2 + 7.88 Y_2 + 0 Z_2 + m_{2y} &= 0 \\ + .0001 (Z_1 + Z_{1'}) - .02250 X_2 - 0 Y_2 - .000650 Z_2 + m_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) - (1)' - 6.83 (X_1 - X_{1'}) - .1360 (Y_1 + Y_{1'}) - .00370 (Z_1 - Z_{1'}) + m_{1x} - m_{1'x} &= 0 \\
 (2) + (2)' + .1360 (X_1 - X_{1'}) + 13.76 (Y_1 + Y_{1'}) + .0704 (Z_1 - Z_{1'}) + m_{1y} + m_{1'y} &= 0 \\
 (3) - (3)' - .00370 (X_1 - X_{1'}) - .0704 (Y_1 + Y_{1'}) - .000576 (Z_1 - Z_{1'}) + .03000 Y_2 + \\
 &+ m_1 - m_{1'} = 0
 \end{aligned}$$

Hagamos:

$$\begin{aligned}
 X_1 + X_{1'} &= x_1, & X_1 - X_{1'} &= x_{1'}, & m_{1x} + m_{1'x} &= p_{1x}, & m_{1x} - m_{1'x} &= p_{1'x}. \\
 Y_1 - Y_{1'} &= y_1, & Y_1 + Y_{1'} &= y_{1'}, & m_{1y} - m_{1'y} &= p_{1y}, & m_{1y} + m_{1'y} &= p_{1'y}. \\
 Z_1 + Z_{1'} &= z_1, & Z_1 - Z_{1'} &= z_{1'}, & m_1 + m_{1'} &= p_1, & m_1 - m_{1'} &= p_{1'}.
 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 &- 6.83 x_1 - .1360 y_1 - .00370 z_1 + p_{1x} = 0 \\
 &+ .1360 + 13.76 y_1 + .0704 z_1 + p_{1y} = 0 \\
 &- .00370 x_1 - .0704 y_1 - .000576 z_1 + .0002 Z_2 + p_1 = 0 \\
 &+ .750 x_{1'} - 10.13 X_2 - .02250 Z_2 + m_{2x} = 0 \\
 &- .0001 z_{1'} - .02250 X_2 - .000650 Z_2 + m_2 = 0 \\
 &- .0150 z_{1'} + 7.88 Y_2 + m_{2y} = 0 \\
 &- 6.83 x_{1'} - .1360 y_{1'} - .00370 z_{1'} + p_{1'x} = 0 \\
 &+ .1360 x_{1'} + 13.76 y_{1'} + .0704 z_{1'} + p_{1'y} = 0 \\
 &- .00370 x_{1'} - .0704 y_{1'} - .000576 z_{1'} + .300 Y_2 + p_{1'} = 0
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} I \\ \\ \\ \\ \\ \\ I' \end{array}$$

Resolución de los sistemas auxiliares I y I'.

Despejando a $x_1, y_1, z_1, x_{1'}, y_{1'}$ y $z_{1'}$ del primer y último sistemas de tres ecuaciones; usando determinantes, el cálculo se hace como sigue:

$$\begin{vmatrix} -6.83 & - & .1360 & - & .00370 \\ + & .1360 & + & 13.76 & + & .0704 \\ - & .00370 & - & .0704 & + & .000576 \end{vmatrix} = + .0541 + .0000354 + .0000354 - .0001882 - .0338 - .00001065 = + .0202.$$

$$\begin{vmatrix} + & 13.76 & + & .0704 \\ - & .0704 & - & .000576 \end{vmatrix} = \frac{- .00792}{- .00296}, \quad \begin{vmatrix} + & .1360 & + & .0704 \\ - & .00370 & - & .000576 \end{vmatrix} = \frac{+ .0000784}{- .0002605},$$

$$\begin{vmatrix} + & .1360 & + & 13.76 \\ - & .00370 & - & .0704 \end{vmatrix} = \frac{- .00957}{+ .0413},$$

$$\begin{vmatrix} - & .1360 & - & .00370 \\ - & .0704 & - & .000576 \end{vmatrix} = \frac{- .0000784}{+ .0001821}, \quad \begin{vmatrix} - & 6.83 & - & .00370 \\ - & .00370 & - & .000576 \end{vmatrix} = \frac{+ .00393}{+ .00392},$$

$$\begin{vmatrix} - & 6.83 & - & .1360 \\ - & .00370 & - & .0704 \end{vmatrix} = \frac{- .481}{- .180},$$

$$\begin{vmatrix} - & .1360 & - & .00370 \\ + & 13.76 & + & .0704 \end{vmatrix} = \frac{- & .00957}{+ & .0509} \begin{vmatrix} - & 6.83 & - & .00370 \\ + & .1360 & + & .0704 \end{vmatrix} = \frac{+ & .481}{- & .000504} \begin{vmatrix} - & 6.83 & - & .00370 \\ + & .1360 & + & .0704 \end{vmatrix} = \frac{+ & .481}{+ & .480}$$

$$\begin{vmatrix} - & 6.83 & - & .1360 \\ + & .1360 & + & 13.76 \end{vmatrix} = \frac{- & 93.9}{+ & .0185} \begin{vmatrix} - & 6.83 & - & .1360 \\ + & .1360 & + & 13.76 \end{vmatrix} = \frac{- & 93.9}{- & 93.9}$$

$$\begin{vmatrix} + & .1465 \\ - & .00902 \\ - & 2.045 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} + & .00903 \\ - & .1940 \\ - & 22.75 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} - & 2.045 \\ + & 23.75 \\ + & 46.50 \end{vmatrix}$$

Luego se obtiene:

$$x_1 = + .1465 p_{1x} - .00902 p_{1y} - 2.045 p_1 - .000409 Z_2$$

$$y_1 = + .00902 p_{1x} - .1940 p_{1y} - 23.75 p_1 - .00475 Z_2 \quad ((1))$$

$$z_1 = - 2.045 p_{1x} + 23.75 p_{1y} + 4650 p_1 + .930 Z_2$$

$$x_{1'} = + .1465 p_{1'x} + .00902 p_{1'y} - 2.045 p_{1'} - .0614 Y_2$$

$$y_{1'} = + .00902 p_{1'x} - .1940 p_{1'y} - 23.75 p_{1'} - .713 Y_2 \quad ((2))$$

$$z_{1'} = - 2.045 p_{1'x} - 23.75 p_{1'y} + 4650 p_{1'} + 139.5 Y_2$$

Las tres ecuaciones intermedias las escribimos así:

$$x_{1'} - 13.5 X_2 - .0300 Z_2 + 1.333 m_{2x} = 0$$

$$z_{1'} - 225.0 X_2 - 6.50 Z_2 + 10000 m_2 = 0$$

$$z_{1'} - 52.5 Y_2 - 66.6 m_{2y} = 0$$

En las que se sustituyen los valores de ((1)) y ((2)) y se despeja sucesivamente X_2 , Z_2 y Y_2 , así se obtiene:

$$- 13.5 X_2 - .0304 Z_2 + .1465 p_{1x} - .00902 p_{1y} - 2.045 p_1 + 1.333 m_{2x} = 0$$

$$- 225.0 X_2 - 5.57 Z_2 - 2.045 p_{1x} + 23.75 p_{1y} + 4650 p_1 + 10000 m_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} - & 13.5 & - & 0.304 \\ - & 225.0 & - & 5.57 \end{vmatrix} = + 75.3 - 6.85 = + 68.4$$

$$\begin{vmatrix} - & 5.57 \\ + & .0304 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} + & 225.0 \\ - & 12.5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} + & .0815 \\ - & .000556 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} - & 3.29 \\ + & .1973 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & .01195 \\ + & .00091 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{1x} - .000735 \\ - & .01058 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{1y} - .1668 \\ - & 2.070 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 + .1088 m_{2x} \\ - & .445 m_2 \end{vmatrix}$$

$$X_2 = + .01286 p_{1x} - .01132 p_{1y} - 2.237 p_1 + .1088 m_{2x} + 4.45 m_2 \quad ((3))$$

$$\begin{vmatrix} - & .482 \\ - & .404 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{1x} + .02970 \\ + & 4.69 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{1y} + 6.74 \\ + & 917 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 - 4.39 m_{2x} \\ + & 1973 m_2 \end{vmatrix}$$

$$Z_2 = - .886 p_{1x} + 4.72 p_{1y} + 924 p_1 - 4.39 m_{2x} + 1973 m_2 \quad ((4))$$

$$- 2.045 p_{1x} - 23.75 p_{1y} + 4650 p_1 - 386 Y_2 - 66.6 m_{2y} = 0$$

$$\therefore Y_2 = - .00530 p_{1x} - .0615 p_{1y} + 1205 p_1 - .1726 m_{2y}. \quad ((5))$$

además.

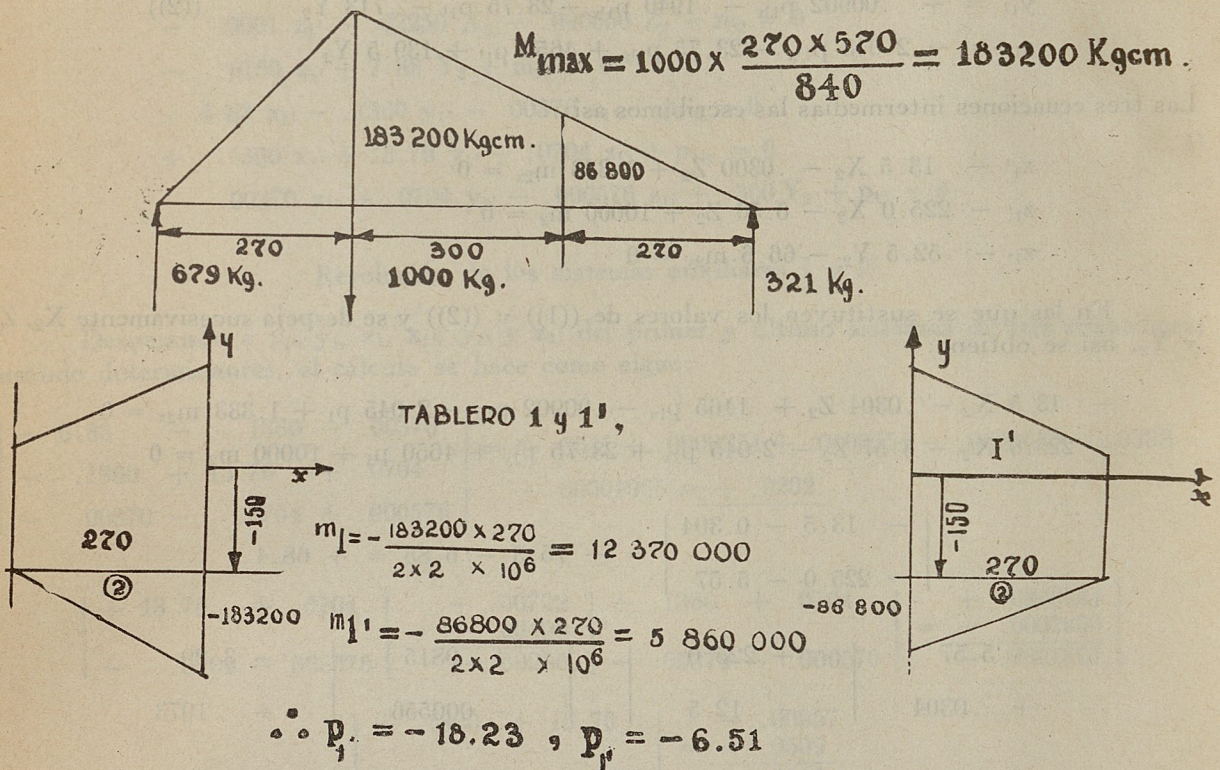
$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{x_1 + x_{1'}}{2}, & Y_1 &= \frac{y_1 + y_{1'}}{2}, & Z_1 &= \frac{z_1 - z_{1'}}{2} \\ X_{1'} &= \frac{x_1 - x_{1'}}{2}, & Y_{1'} &= \frac{y_1 - y_{1'}}{2}, & Z_{1'} &= \frac{z_1 - z_{1'}}{2} \end{aligned} \right\} (6)$$

El método de resolución es general y se aplica a estructuras de cualquier número de tableros.

vamente es $\frac{n}{2} + 1$ o $\frac{n+1}{2}$, según sea n par o impar.

El número de sistemas de tres ecuaciones que se tienen que resolver sucesi-

Constantes de carga para una concentración en un nudo inferior.

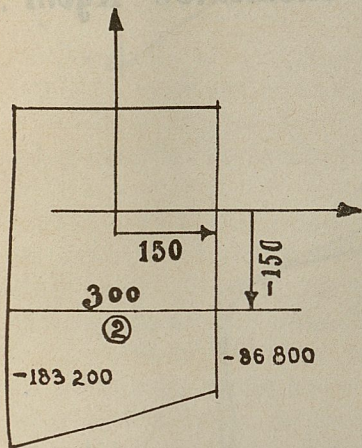


$$m_{1x} = -150 \times -12.37 = +1855 \quad \therefore p_{1x} = +2735$$

$$m_{1'x} = -150 \times -5.86 = +880 \quad \therefore p_{1'x} = +975$$

$$m_{1y} = \frac{270^2 \times 183200}{6 \times 2 \times 10^6} = +1112 \quad \dots \dots \dots \cdot P_{1y} = +1638$$

$$m_{1'y} = -\frac{270^2 \times 86800}{6 \times 2 \times 10^6} = -526 \quad \dots \dots \dots P_{1'y} = +586$$



TABLERO 2.

$$m_2 = -\frac{(183200 + 86800) 300}{2 \times 2 \times 10^6} = -20.25$$

$$m_{2x} = -150 \times -20.25 = +3040$$

$$m_{2y} = -\frac{(183200 - 86800) 150 \times -50}{2 \times 10^6} = +362$$

Aplicando las fórmulas ((3)), ((4)), ((5)), ((1)) y ((2)) se tiene:

$$X_2 = +35.2 - 18.55 + 40.8 + 333.5 + 90.1 = +478 \text{ Kg.}$$

$$Z_2 = -2420 - 7440 - 16830 - 13350 - 40.000 = -64.900 \text{ Kgcm.}$$

$$Y_2 = -5.17 - 36.0 - 78.5 - 62.5 = -182.2 \text{ Kg.}$$

$$x_1 = +401. - 14.78 + 37.3 + 26.55 = +450 \text{ Kg.}$$

$$y_1 = +24.7 - 418. + 434. + 308.0 = +449 \text{ Kg.}$$

$$z_1 = -5.600 + 38.900 - 60.400 = -112 \text{ 000 Kgcm.}$$

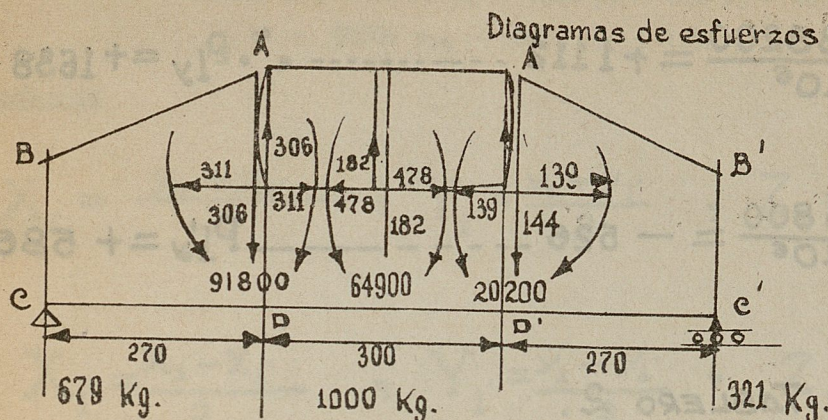
$$x_{1'} = +143.0 + 5.29 + 13.31 + 11.19 = +172 \text{ Kg.}$$

$$y_{1'} = -8.80 - 113.8 + 154.5 + 130.0 = +162 \text{ Kg.}$$

$$z_{1'} = -1.995 - 13.910 - 30.250 - 25.400 = -71 \text{ 600 Kgcm.}$$

$$X_1 = \frac{450 + 172}{2} = +311 \text{ Kg.} \quad Y_1 = \frac{449 + 162}{2} = +306 \text{ Kg.} \quad Z_1 = -\frac{112000 - 71600}{2} = -91800 \text{ Kgcm.}$$

$$X_{1'} = \frac{450 - 217}{2} = +311 \text{ Kg.} \quad Y_{1'} = \frac{449 - 162}{2} = -144 \text{ Kg.} \quad Z_{1'} = \frac{112000 - 71600}{2} = -20200 \text{ Kgcm.}$$



Cálculo de los momentos en los nodos.

1er. Tablero

$$M_{A1} = 91\,800 - 311 \times 150 = + 45\,200 \text{ Kgc.m.}$$

$$M_B = 91\,800 - 311 \times 30 - 306 \times 270 = 100$$

$$M_C = 91\,800 + 311 \times 150 - 306 \times 270 = + 55\,800$$

$$M_{D1} = 91\,800 + 311 \times 150 - 183\,200 = - 44\,800$$

$$M_{Dm} = 91\,800 + 311 \times 150 - 64\,900 - 478 \times 150 - 182 \times 150 = - 25\,500$$

$$M_{Am} = 91\,800 - 311 \times 150 - 64\,900 + 478 \times 150 - 182 \times 150 = + 24\,700$$

2o. Tablero

$$M_{A2} = 64\,900 - 578 \times 150 + 182 \times 150 = + 20\,500$$

$$M_{D2} = 64\,900 + 478 \times 150 + 182 \times 150 - 183\,200 = - 19\,300$$

$$M_{D'2} = 64\,900 + 478 \times 150 + 182 \times 150 - 86\,800 = + 22\,500$$

$$M_{D'm} = 64\,900 + 478 \times 150 - 182 \times 150 - 20\,200 - 139 \times 150 = + 68\,200$$

$$M_{A'1m} = 64\,900 - 478 \times 150 - 182 \times 150 - 20\,200 + 139 \times 150 = - 33\,400$$

$$M_{A'2} = 64\,900 - 478 \times 150 = - 34\,100$$

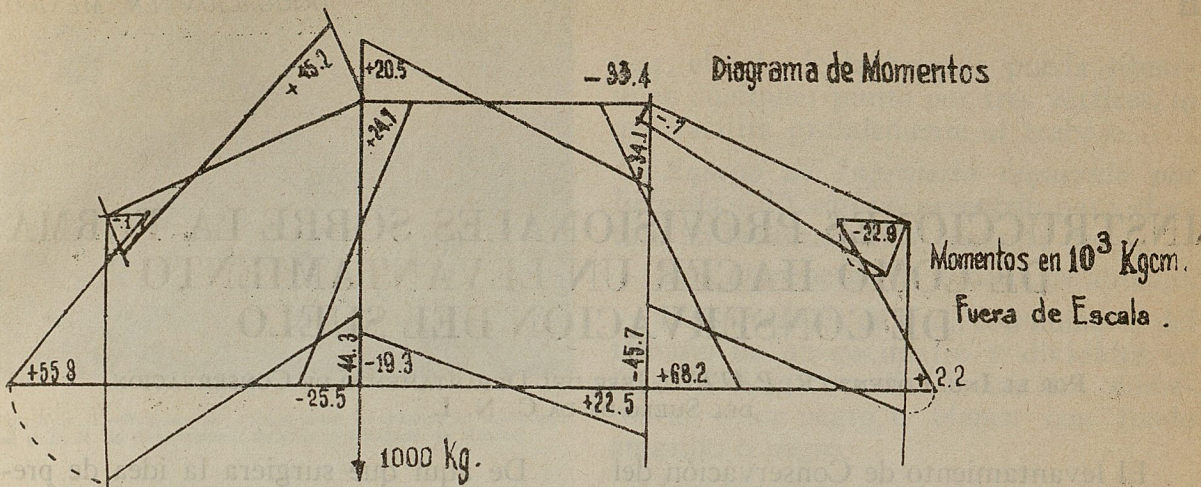
Tablero 1'.

$$M_{A'1'} = 20\,200 - 139 \times 150 = - 700 \text{ Kgc.m.}$$

$$M_{B'} = 20\,200 - 139 \times 30 - 144 \times 270 = - 22\,900$$

$$M_{C'} = 20\,200 + 139 \times 150 - 144 \times 270 = + 2\,200$$

$$M_{D'1'} = 20\,200 + 139 \times 150 - 86\,800 = - 45\,700$$



Esquema de Deformación.

