Cubicación de terracerías de sección trapecial cuando hay pendiente transversal en el terreno

Por el Ingeniero
JEHOVA GUERRERO TORRES
del Departamento de Proyectos de la C. N. I.

CUANDO se calcula la cubicación de un canal o terraplén que ha sido localizado en un terreno que puede considerarse localmente como plano para el cálculo del área de una sección, pero que tiene *una pendiente transversal al eje de la línea* suficientemente grande para que no resulte tolerable el error que se obtendría al aplicar la fórmula del trapecio, se presenta un sencillo problema de geometría que, por lo que sabemos, no ha tenido una solución que de alguna manera pueda considerarse como satisfactoria.

El problema consiste en valuar el área del triángulo que aparece sombreado en la figura 1, el cual viene siendo el error a que conduce el aplicar la fórmula del trapecio; conocida esa área se puede hacer la correspondiente correc-

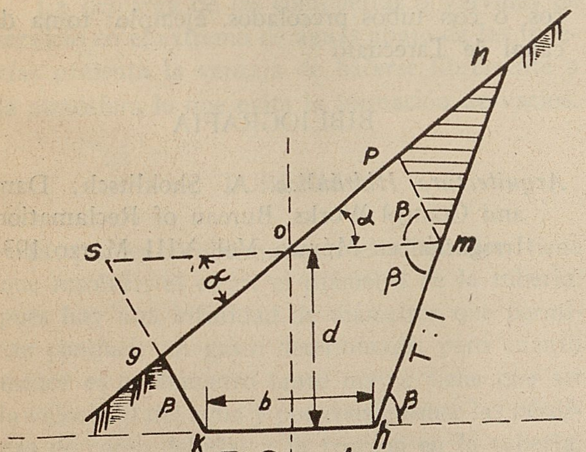


FIG. 1

ción aditiva, o mejor, como nos hemos propuesto, se puede calcular a qué incremento en el espesor resulta equivalente para que la aplicación de la fórmula del trapecio proporcione exactamente el área de la sección. Si se construye un diagrama que pueda proporcionar fácil y rápidamente el incremento de que se trata, sólo habrá que añadir éste al espesor, para calcular con toda precisión el área de la sección como cuando el terreno es plano y horizontal. En esta forma queda grandemente simplificado el monótono y tedioso trabajo de cubicación, cualquiera que sea el procedimiento empleado, incluso nuestro método del "Perfil Cuadrático" (véase IRRIGACION EN MEXICO, número de mayo-junio de 1942).

Conviene hacer notar que la aplicación de una solución satisfactoria al problema de que se trata puede extenderse a casos en que el terreno sea tan quebrado e irregular como se quiera, pues un calculista experto puede muy fácil y aproximadamente trazar a ojo en el perfil transversal del terreno una línea de compensación recta, para cada sección, con lo que habrá puesto su caso dentro del alcance de la solución de nuestro problema, ahorrándose el tener que cuadrar cada sección con el planímetro.

Estas líneas tienen por objeto someter a la consideración del lector nuestra solución, y para eso se ha procurado mostrar con todo detalle su desarrollo.

En primer lugar hay que encontrar el área del triángulo ya mencionado de la figura 1; en muy pocos libros se encuentra dicho valor y siempre aparece en forma muy complicada. Veamos, por ejemplo, la fórmula del libro "Railroad Construction" de Webb (Edic. 1932, pág. 148):

$$\text{Area m. n. p.} = 2\left(\tfrac{1}{2}\, b + d \cot \beta\right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha . \operatorname{sen} \beta . \cos \beta}{\cos 2\alpha - \cos \beta} \;.\;.\; (\mathrm{I})$$

La complicación de esta fórmula invita a preferir el uso del planímetro para casos aislados; para usarla construyendo un diagrama, parece tan problemática que vale la pena esforzarse por buscar una simplificación haciendo la

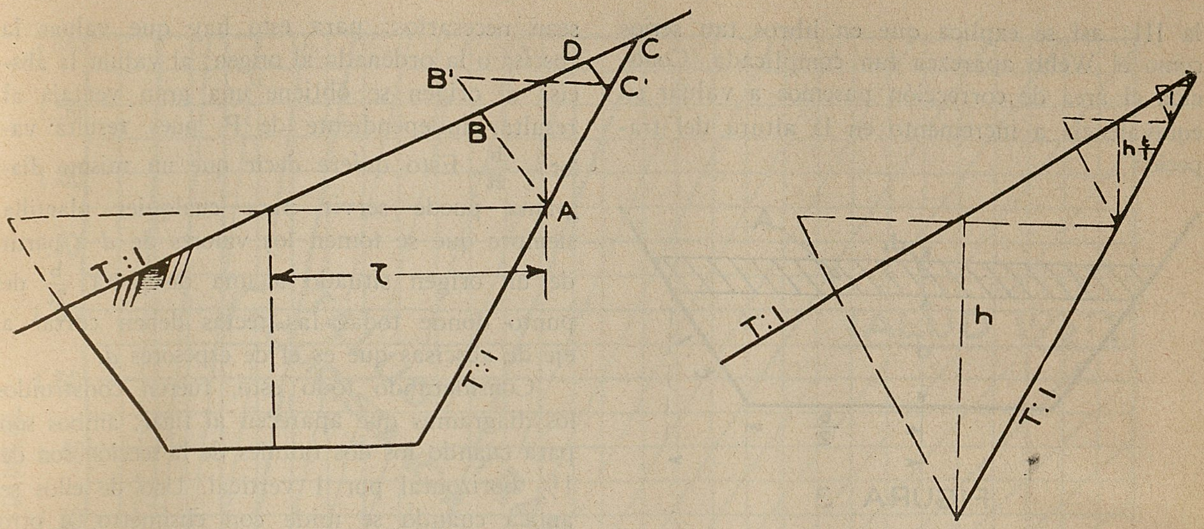


FIGURA 2

deducción independientemente, cosa que hicimos como en seguida se indica, con excelentes resultados.

Como la fórmula I evidentemente fué deducida por Trigonometría, medio por el cual la experiencia indica que con frecuencia se complican grandemente los problemas geométricos, es conveniente tratar de atacar el problema en otra forma.

En la figura 2 el triángulo A B C es equivalente al triángulo isósceles A B' C' más el triángulo CC'D; este último, siendo semejante al A B C, puede también descomponerse en un isósceles semejante al A B' C' y otro semejante al CC'D que a su vez puede descomponerse. De esta manera tenemos una suma de un número infinito de triángulos isósceles semejantes, cada uno de los cuales guarda una misma relación constante entre sus dimensiones y las del que le antecede. Llamando h a la altura del primer isósceles su semibase valdrá th; entonces, la altura del isósceles siguiente sería de h $\frac{t}{T}$ y por tanto la relación entre las alturas y todas las dimensiones entre esos triángulos valdría $\frac{t}{T}$; resulta entonces que para encontrar el área de cualquier triángulo, basta multiplicar la del inmediato anterior por $\frac{t^2}{T^2}$. Aplicaremos esto partiendo del área del primer triángulo:

$$A_1 = \frac{l}{T} \cdot \frac{l}{T}\, t = l^2 \frac{t}{T^2}$$

$$A_2 = A_1 \frac{t^2}{T^2} = l^2 \frac{t^3}{T^4}$$

$$A_3 = A_2 \frac{t^2}{T^2} = l^2 \frac{t^5}{T^6}$$

. . . .

$$A_n = A_{n-1} \frac{t^2}{T^2} = l^2 \frac{t^{2n-1}}{T^{2n}}$$

Sumando tendremos que el área total valdrá:

$$A = l^2 \left[\frac{t}{T^2} + \frac{t^3}{T^4} + \ldots + \frac{t^{2n-1}}{T^{2n}} \right]$$

Aplicando la fórmula de la progresión geométrica:

$$A = l^2 \times \frac{\frac{t^{2n+1}}{T^{2n+2}} - \frac{t}{T^2}}{\frac{t^2}{T^2} - 1}$$

Puesto que T (talud transversal del terreno) es mayor que t (talud del canal), cuando n tiende al infinito el quebrado $\frac{t^{2n+1}}{T^{2n+2}}$ tenderá a cero; entonces:

$$A = l^2 \frac{\frac{t}{T^2}}{1 - \frac{t^2}{T^2}} = l^2 \frac{t}{T^2 - t^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{II}$$

Salta a la vista la sencillez de esta fórmula respecto a la I. Si se quiere hacer intervenir el ángulo de inclinación transversal del terreno, puesto que $T = \cot \alpha$, se tendrá:

$$A = l^2 \frac{t}{\cot^2 \alpha - t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{III}$$

La fórmula III puede obtenerse simplificando a la I, pero esto sólo se facilita conociendo ya la III; así se explica que en libros tan serios como el Webb aparezca tan complicada. Conocida el área de corrección pasemos a valuar su equivalencia a incremento en la altura del trapecio:

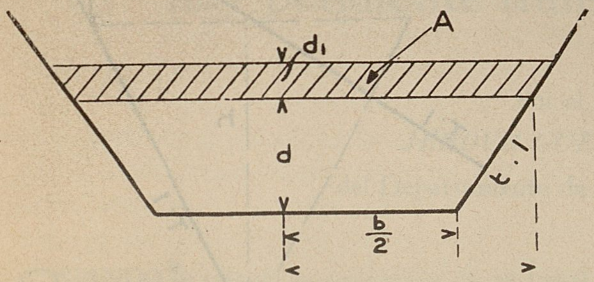


FIGURA 3

El área del triángulo va a ser reducida al área del trapecio superpuesto que aparece sombreado en la figura 3. Llamando K al coeficiente de l^2 en la fórmula II ó en la III, se tendrá:

$$A = 2\,l\,d_1 + t\,d_1^2 = K\,l^2$$

$$t\,d_1^2 + 2\,l\,d_1 - K\,l^2 = 0$$

$$\therefore d_1 = \frac{-2\,l + \sqrt{4\,l^2 + 4\,t\,K\,l^2}}{2\,t}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{l}{t}\right)^2 + t\,K\left(\frac{l}{t}\right)^2} - \frac{l}{t}$$

$$= \frac{l}{t}\left(\sqrt{1 + t\,K} - 1\right)$$

Sustituyendo el valor de l se tendrá:

$$d_1 = \frac{1}{t}\left(\frac{b}{2} + t\,d\right)\left(\sqrt{1 + t\,K} - 1\right)$$

Sustituyendo K y simplificando:

$$d_1 = \frac{b}{2t}\left(\sqrt{\frac{T^2}{T^2 - t^2}} - 1\right) + \left(\sqrt{\frac{T^2}{T^2 - t^2}} - 1\right)d$$

Como se ve, para taludes de la sección y del terreno constante y base constante, d_1 es función lineal de d; por consiguiente puede ponerse en la forma de la ecuación de la recta; llamando P a lo contenido dentro del paréntesis se tendrá:

$$d' = \frac{b}{2t}\,P + Pd$$

Se puede obtener gráficamente el valor de d' trazando en un sistema de coordenadas las rectas correspondientes a los valores de P que sean necesarios; para esto hay que valuar la abscisa o la ordenada al origen; al valuar la abscisa al origen se obtiene una gran ventaja al resultar independiente de P, pues resulta valer $-\frac{b}{2t}$. Esto quiere decir que un mismo diagrama puede servir para cualquier plantilla siempre que se tomen los valores de d a partir de un origen situado a una distancia $\frac{b}{2t}$ del punto donde todas las rectas deben cortar al eje de abscisas que es el de espesores d.

Considerando todo esto, fueron construidos los diagramas que aparecen al final; ambos son para cuando los dos taludes de la sección son de 1½ horizontal por 1 vertical. Uno de ellos se aplica cuando se mide con clisímetro, u otro goniómetro, el ángulo de inclinación transversal del terreno. El otro es para cuando se mide en el plano topográfico la equidistancia entre curvas de nivel de un metro, horizontal y normalmente al eje del trazo.

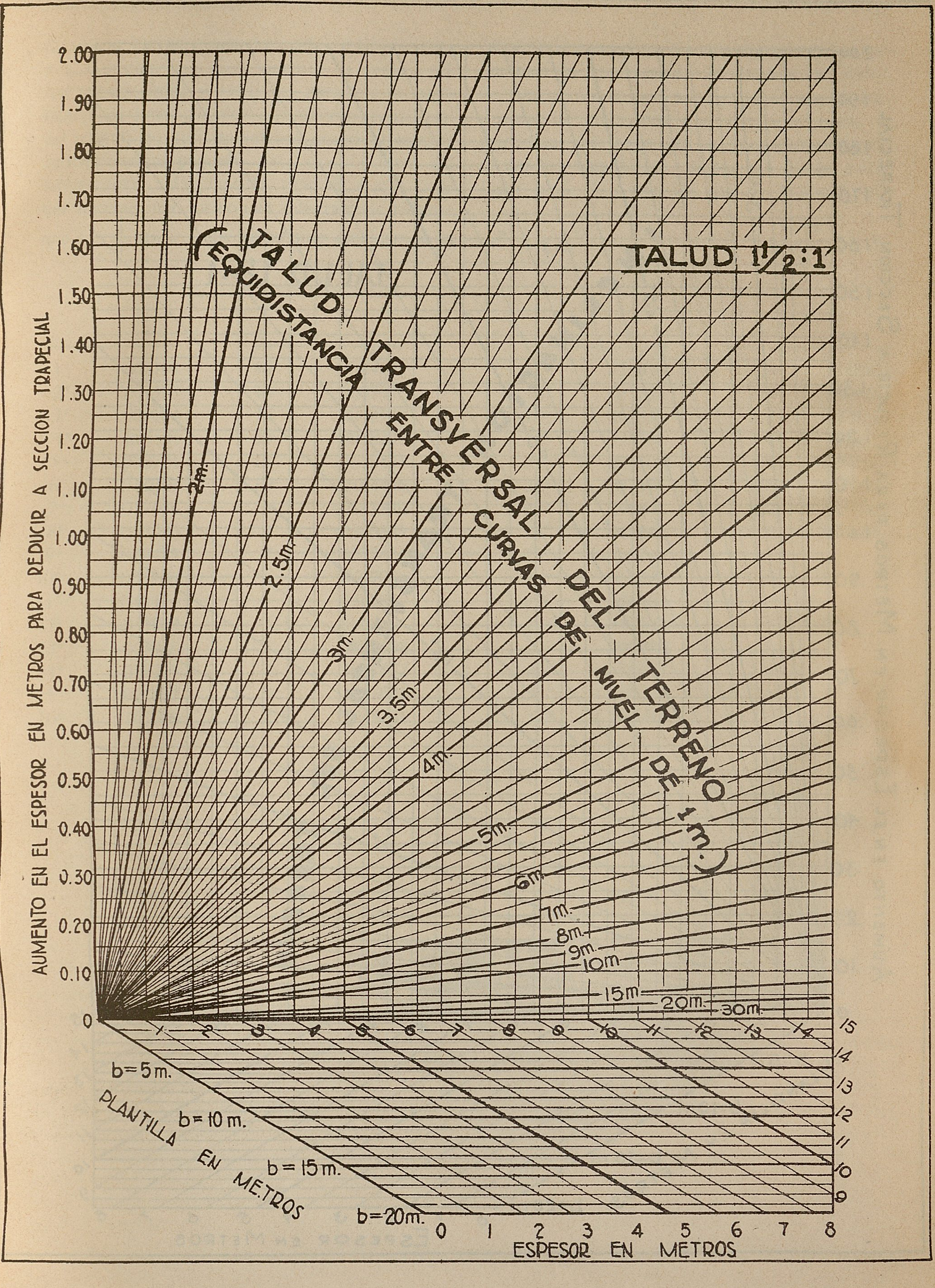
Ilustraremos su uso con dos ejemplos:

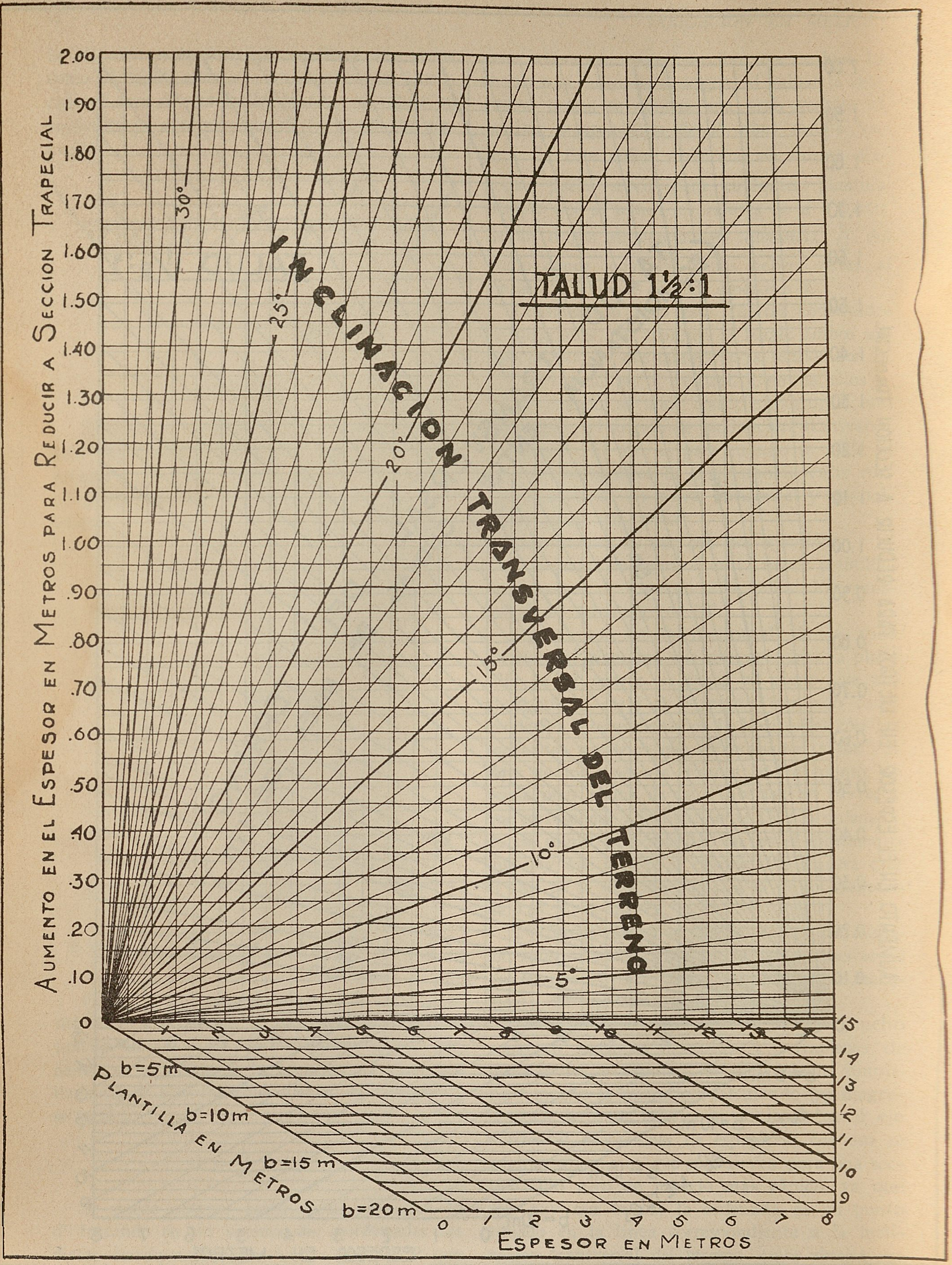
1º Se trata de un canal de 12 m. de plantilla; el espesor es de 3 metros y la inclinación transversal del terreno es de 15°.

Apoyándose en la horizontal de la zona inferior del diagrama que corresponde a la plantilla de 12 metros, se busca el punto que corresponde al corte de 3 metros tomando como escala las intersecciones de la horizontal con las inclinadas paralelas que corresponden a los valores de los espesores. Encontrado el punto, se busca otro punto de igual abscisa en la recta que corresponde a inclinación de 15°; la ordenada de ese punto, que vale 0.65 m. es el incremento que hay que aplicar al espesor. De manera que el área de la sección es igual a la de un trapecio de 3.65 m. de altura.

2º Con la misma sección y espesor del ejemplo anterior supongamos que el talud transversal del terreno es de 5 metros. Resultaría un incremento del espesor de 0.34 m.

Para anchos de plantilla que se usen mucho como en secciones de cortes y terraplenes de ferrocarriles y caminos, es conveniente simplificar mucho la operación calculando los diagramas sin la zona inferior y poniendo en el eje horizontal acotaciones de espesores; con eso se tendrán diagramas que sólo sirven para una sección tipo pero de manejo más rápido, ya que sólo hay que buscar la ordenada de un punto situado en la línea correspondiente a la inclinación transversal del terreno cuya abscisa sea


TALUD 1 1/2 : 1
TALUD TRANSVERSAL DEL TERRENO
(EQUIDISTANCIA ENTRE CURVAS DE NIVEL DE 1 m.)
AUMENTO EN EL ESPESOR EN METROS PARA REDUCIR A SECCION TRAPECIAL
2.00
1.90
1.80
1.70
1.60
1.50
1.40
1.30
1.20
1.10
1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0
2m.
2.5m.
3m.
3.5m.
4m.
5m.
6m.
7m.
8m.
9m.
10m.
15m.
20m.
30m.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
15 14 13 12 11 10 9
b=5m.
b=10m.
b=15m.
b=20m.
PLANTILLA EN METROS
0 1 2 3 4 5 6 7 8
ESPESOR EN METROS



TALUD 1½:1
INCLINACION TRANSVERSAL DEL TERRENO
30°
25°
20°
15°
10°
5°
AUMENTO EN EL ESPESOR EN METROS PARA REDUCIR A SECCION TRAPECIAL
2.00
1.90
1.80
1.70
1.60
1.50
1.40
1.30
1.20
1.10
1.00
.90
.80
.70
.60
.50
.40
.30
.20
.10
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
b=5m
b=10m
b=15m
b=20m
PLANTILLA EN METROS
9 10 11 12 13 14 15
0 1 2 3 4 5 6 7 8
ESPESOR EN METROS

el espesor. Un diagrama dedicado exclusivamente a una sección tipo tiene además la ventaja de que pueden limitarse las líneas para que no haya motivo de error cuando la pendiente transversal del terreno sea suficientemente grande a espesor suficientemente pequeño para que la línea del terreno corte a la plantilla, caso en el que tiene que hacerse una corrección substractiva siempre que $d < \frac{b}{2} \tan \alpha$, que no ha sido considerada en estos diagramas, y para cuya consideración ocuparemos en otra ocasión la atención del lector.

Con el fin de que pueda modificarse el diseño de los diagramas que con estas líneas se presentan, del modo que se juzgue conveniente, se dan en seguida los valores que fueron calculados para P y con los que se hicieron estos

$$P = \sqrt{\frac{\cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - t^2}} - 1 \qquad P = \sqrt{\frac{T^2}{T^2 - t^2}} - 1$$

$t = 1.5$

α	P	T	P	α	P	T	P
1°	.000343	50	.0004503	17°	.125310	2.6	.2242922
2°	.001375	40	.0007039	18°	.145226	2.4	.2810252
3°	.003104	30	.0012523	19°	.167827	2.2	.3670134
4°	.005547	20	.0028243	20°	.193581	2.0	.5118578
5°	.008724	15	.0050378	21°	.223104	1.9	.6292365
6°	.012665	10	.0114430	22°	.257176	1.8	.8090680
7°	.017404	9	.0141850	23°	.296846	1.7	1.1250000
8°	.022990	8	.0180555	24°	.343542	1.6	1.8736847
9°	.029475	7	.0237813	25°	.399244		
10°	.036926	6	.0327956	26°	.466847		
11°	.045424	5	.0482847	27°	.550686		
12°	.055063	4.5	.0606601	28°	.557732		
13°	.065958	4	.0787198	29°	.799910		
14°	.078245	3.5	.1067972	30°	1.000011		
15°	.092092	3	.1547005	31°	1.308326		
16°	.107698	2.8	.1842738	32°	1.869414		