

NUEVA MODALIDAD EN LA TEORIA Y APLICACION DEL METODO DE LAS RELACIONES DE CAIDAS DE POTENCIAL DE LA GEOFISICA ELECTRICA

POR EL ING. ALFONSO DE LA O. CARREÑO (*)

(TRABAJO PRESENTADO EN LA PRIMERA ASAMBLEA REGIONAL DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA, EN CUERNAVACA, MOR., EN NOVIEMBRE DE 1943)

PROFESOR DE METODOS GEOFISICOS DE EXPLORACION EN LA ESCUELA N. DE INGENIEROS DE LA U. N. A.- JEFE DE LA OFICINA DE GEOLOGIA DE LA COMISION NACIONAL DE IRRIGACION

Los métodos de la Geofísica Eléctrica pueden dividirse en tres grandes grupos:

1. Métodos basados en la medida del potencial eléctrico.
2. Métodos electromagnéticos.
3. Radio-métodos.

El de Relaciones de Caídas de Potencial, pertenece al primer grupo. A fin de que se vea con más claridad en qué consiste la nueva variante, ideada por el que esto escribe, será necesario hacer un breve resumen de las dos modalidades hasta hoy conocidas y usadas.

Suponemos un campo eléctrico artificial estable o cuasi estable, generado entre dos punto-electrodos de la superficie límite de un semi-medio infinito; el estudio de la distribución de dicho campo puede hacerse mediante la medición de ciertas funciones del mismo, siguiendo diversos sistemas. En el método que nos ocupa se hacen las medidas de las relaciones de caídas de potencial sucesivas entre tres electrodos se-

cundarios que van siendo movidos en una línea normal al de los punto-electrodos de corriente o primarios. De las relaciones sucesivas es posible calcular otras dos funciones más, tanto en sondeos verticales como en secciones transversales, que son la llamada resistividad aparente y el gradiente de potencial. La forma de estas tres funciones dependerá de la naturaleza del semi-medio, es decir, de las propiedades eléctricas de sus componentes y de la distribución de ellos.

ECUACIONES GENERALES

Sin suponer de momento ninguna estructura especial o determinada del semi-medio infinito, la expresión general de la caída de potencial entre dos puntos cualesquiera como A y C, dentro del campo formado entre los punto-electrodos E_1 y E_2 es la siguiente (Fig. 1):

(*) Miembro Fundador de la Sociedad Matemática Mexicana.

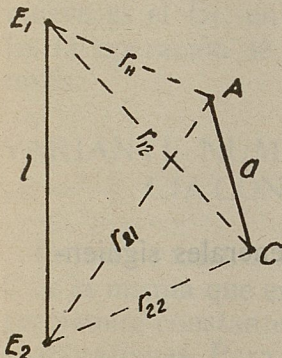


Fig.-1

$$\Delta V_{AC} = \frac{\rho_a I}{2 \pi a} \left[\frac{a}{r_{11}} - \frac{a}{r_{21}} - \left(\frac{a}{r_{12}} - \frac{a}{r_{22}} \right) \right] \dots (1)$$

I , la intensidad de la corriente.
 ρ_a , la resistividad aparente para el punto medio entre A y C.

a , separación entre estos puntos.
 Si dichos puntos están en una línea normal a E_1E_2 , se tendrá (Fig. 2):

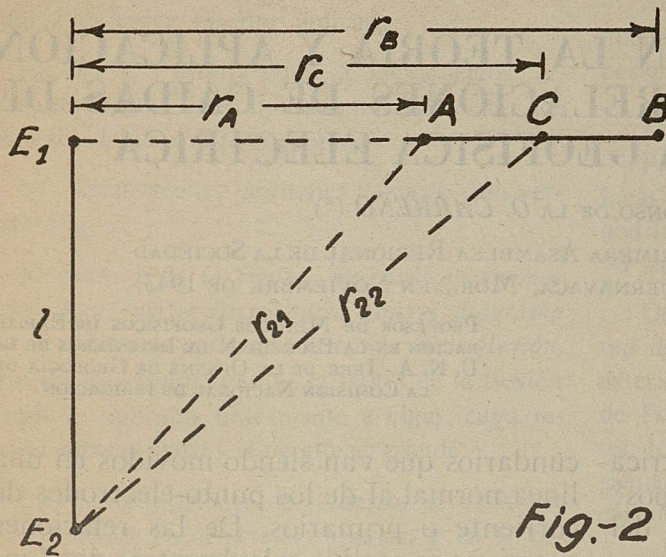


Fig.-2

$$r_{11} = r_A$$

$$r_{21} = \sqrt{r_A^2 + l^2}$$

$$r_{12} = r_C$$

$$r_{22} = \sqrt{r_C^2 + l^2}$$

y la ecuación Núm. 1, se transformará en la siguiente:

$$\Delta V_{AC} = \frac{\rho_a I}{2\pi a} \left[\frac{a}{r_A} - \frac{a}{\sqrt{r_A^2 + l^2}} - \left(\frac{a}{r_C} - \frac{a}{\sqrt{r_C^2 + l^2}} \right) \right] \text{ ---- (2)}$$

Si, como se acostumbra, el electrodo E_2 su influencia pueda despreciarse la ecuación Núm. 2 se simplificará como sigue:

$$\Delta V_{AC} = \frac{\rho_a I (r_C - r_A)}{2\pi r_A r_C} \text{ ---- (3)}$$

que podemos escribir del modo siguiente, si llamamos (r) a la distancia media entre A y C:

$$\Delta V_{AC} = \frac{a \rho_a I}{2\pi (r^2 - \frac{a^2}{4})} = \frac{\rho_a I}{2\pi a \left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{4} \right]} \text{ ---- (4)}$$

puesto que

$$r_A = r - \frac{a}{2} \quad \text{y} \quad r_C = r + \frac{a}{2}$$

De las ecuaciones Núms. 3 y 4 se deducen las dos expresiones generales siguientes, para la resistividad aparente:

$$\rho_a = \frac{2\pi r_A r_C}{r_C - r_A} \left(\frac{\Delta V_{AC}}{I} \right) = 2\pi a \left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] \frac{\Delta V_{AC}}{I} \text{ ---- (5)}$$

Si se tiene un tercer punto como (B) (Fig. 2), la caída de potencial entre C y B, de acuerdo con la ecuación (3), sería:

$$\Delta V_{CB} = \frac{\rho_a I (r_B - r_C)}{2\pi r_C r_B} \text{ ---- (6)}$$

Dividiendo (3) entre (6), tendremos la expresión general de las relaciones de caídas de potencial para el punto central (c).

$$\frac{\Delta V_{AC}}{\Delta V_{CB}} = \frac{r_B (r_C - r_A)}{r_A (r_B - r_C)} \text{ ---- (7)}$$

que se acostumbra llamar simplemente $\frac{A}{B}$. Tratándose de un semi-medio infinito, homogéneo e isótropo, la ecuación Núm. 7 nos dará la llamada relación normal que se acostumbra representar por F.

En realidad las ecuaciones de la (3) a la (7), como luego veremos, están muy lejos de ser tan sencillas; su complicación dependerá de la propia naturaleza del semi-medio en cada caso especial.

VARIANTES CONOCIDAS DEL METODO

En este método la penetración se gana aumentando por etapas sucesivas la distancia que media entre el conjunto de electrodos secundarios ACB y el punto-electrodo E₁ y precisamente la forma en que se hace tal incremento distingue las variantes entre sí. En sondeos verticales el electrodo C permanece fijo y el que se mueve es el E₁, en secciones transversales la operación se hace precisamente al revés.

VARIANTE NUM. 1 (EQUIDISTANCIA CONSTANTE)

En esta variante la distancia entre A y C es la misma que entre C y B y, además, permanece constante durante una serie de observaciones. Para fijar las ideas supongamos que E₁ permanece fijo

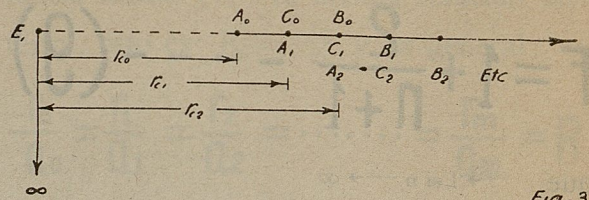


Fig.-3

Las posiciones sucesivas de los electrodos secundarios son (Fig. 3):

A₀ C₀ B₀

A₁ C₁ B₁

A₂ B₂ C₂

.....

.....

y las distancias r_c van siendo incrementadas una cantidad constante (a), de tal modo que en cada posición los electrodos A y C ocupan respectivamente las de C y B de la posición anterior; de este modo se obtiene un traslape y los valores de las relaciones quedan ligados entre sí. En realidad se aprovechan los inversos de tales relaciones. En estas condiciones si se conoce, por ejemplo, la relación inicial cualquiera $\frac{B_0}{A_0}$ correspondiente a la posición A₀C₀B₀ y se supone una caída de potencial arbitraria (A₀) entre A₀ y C₀, será posible calcular la caída (B₀) entre C₀ y B₀, que es la misma entre A₁ y C₁ con lo cual será posible calcular la que corresponde a C₁ y B₁ al determinarse la relación $\frac{B_1}{A_1}$ y así, sucesivamente.

En este caso, la relación normal, partiendo de la ecuación Núm. 7, tendrá por expresión:

$$F = \frac{r_B}{r_A} = \frac{r_C + a}{r_C - a} \text{ ---- (8)}$$

puesto que r_c - r_A = r_B - r_C = a. Conviene en este caso que desde la posición inicial, la distancia r_c sea un múltiplo exacto de (a), de modo que si llamamos (o) a dicha posición cuando r_c = 2a, la ecuación número 8, se calculará con la siguiente relación para cualquiera posición n.

$$F = 1 + \frac{2}{n+1} \text{ ---- (9)}$$

que $\rightarrow 1$ si $n \rightarrow \infty$

Las caídas sucesivas de potencial permiten calcular los valores de la resistividad por medio de la ecuación Núm. 5, en la que puede suponerse igual a la unidad u otra constante cualquiera, al cociente $\frac{2\pi}{I}$, supuesto que se parte de una caída inicial de potencial arbitraria, con lo cual se determinarán las variaciones relativas de (ρ) y no las reales, que no es necesario conocer. Si se procede como se explicó, al establecerse la ecuación Núm. 9, entonces la ecuación Núm. 5 puede escribirse como sigue:

$$\rho_a = a(n+2)(n+1) \Delta V \text{ ---- (10)}$$

$$\frac{(2\pi)}{I} = 1$$

Como después veremos, la ecuación (10) aunque da valores continuos de (ρ) es difícil de interpretar, éste es uno de los inconvenientes de esta variante, siendo otro el que a medida que la distancia al electrodo E_1 aumenta, va perdiéndose sensibilidad, supuesto que sabemos que el potencial $\rightarrow 0$, cuando la distancia aumenta indefinidamente.

VARIANTE NUM. 2 (EQUIDISTANCIA VARIABLE)

Como en la variante Núm. 1, la distancia entre los electrodos A y C, es la misma que entre C y B, pero esta equidistancia va siendo incrementada al mismo tiempo que crece la distancia r_c al electrodo E_1 , de manera que siempre se tenga una relación fija $M = \frac{r_c}{a}$. En este caso, los incrementos de r_c pueden ser constantes o no. Este procedimiento tiene la ventaja de que prácticamente la sensibilidad es constante en cualquier posición, pero presenta

el grave inconveniente de que las relaciones de caídas de potencial no quedan ligadas entre sí, supuesto que si, por ejemplo, se tiene una posición $A_0C_0B_0$, en la que sigue u otra cualquiera cuando más podría ligarse uno de ellos, pero no los otros dos, ya que a r_c puede dársele un incremento arbitrario y satisfacer solamente que la relación M sea constante. Por esta razón no es posible obtener una curva continua de las variaciones de la resistividad aparente como en la variante Núm. 1, contentándose en la interpretación solamente con las curvas de relaciones que en cada caso tienen una forma definida.

En este caso, en una serie de observaciones, la relación normal será constante e igual a la siguiente, partiendo de la ecuación Núm. 8.

$$F = \frac{\frac{r_c}{a} + 1}{\frac{r_c}{a} - 1} = \frac{M+1}{M-1} \text{ ---- (11)}$$

Si $M \rightarrow \infty$, $F \rightarrow 1$

NUEVA VARIANTE DEL AUTOR

En esta variante la distancia entre A y C es diferente de la que existe entre C y B, ambas van siendo incrementadas al aumentarse la distancia a E; pero en tal forma que van ligadas entre sí, lo que permite obtener las ventajas de las dos variantes antes descritas, es decir, por una parte calcularse una curva continua de la resistividad aparente, y, por otra, tener siempre la misma sensibilidad. En la interpretación de dichas curvas se eliminan las dificultades que se presentan en la variante Núm. 1, contándose, además, con las de relaciones de caídas de potencial. Esta variante se aplica con ventaja, especialmente en sondeos verticales.

El artificio consiste en lo siguiente:

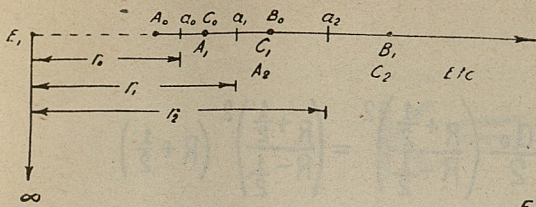


Fig. 4

Supongamos (Fig. 4) que la separación inicial entre los electrodos \$A_0C_0\$ es (\$a_0\$) que guarda una relación \$R\$ con la distancia media inicial \$r_0\$, es decir, \$R = \frac{r_0}{a_0}\$ y que la distancia entre \$C_0\$ y \$B_0\$ es (\$a_1\$) que corresponde a la separación entre \$A_1C_1\$ de la siguiente posición, de tal modo que guarde también con la nueva dis-

tancia media (\$r_1\$) la misma relación anterior, esto es: \$R = \frac{r_1}{a_1}\$ y en general:

$$\frac{r_0}{a_0} = \frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2} = \dots = \frac{r_m}{a_m} = R$$

de tal modo que los incrementos de las distancias medias (\$r\$) exigen los correspondientes de las separaciones (\$a\$) según cierta ley, para que las observaciones queden ligadas entre sí. Es fácil calcular las expresiones generales de las diferentes distancias que intervienen en las medidas para una posición cualquiera en función de la separación inicial \$a_0\$ y de la relación (\$R\$) que se desee, como sigue:

$$r_0 = a_0 R$$

$$r_{A_0} = r_0 - \frac{a_0}{2} = a_0 \left(R - \frac{1}{2} \right)$$

$$r_{C_0} = r_{A_1} = r_0 + \frac{a_0}{2} = a_0 \left(R + \frac{1}{2} \right)$$

$$a_1 = \frac{r_1}{R} = \frac{r_{A_1} + \frac{a_1}{2}}{R} = \frac{a_0 \left(R + \frac{1}{2} \right) + \frac{a_1}{2}}{R} \text{ es decir}$$

$$a_1 = a_0 \frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \text{ y por lo tanto}$$

$$r_1 = a_1 R = a_0 \frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} R$$

$$r_{B_0} = r_{C_1} = r_{A_2} = r_1 + \frac{a_1}{2} = a_0 \frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} R + \frac{a_0}{2} \frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} = a_0 \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right) \left(R + \frac{1}{2} \right)$$

$$a_2 = \frac{r_2}{R} = \frac{r_{B_0} + \frac{a_2}{2}}{R} = \frac{a_0 \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right) \left(R + \frac{1}{2} \right) + \frac{a_2}{2}}{R}, \text{ es decir}$$

$$a_2 = a_0 \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right)^2 \text{ así pues}$$

$$r_2 = \alpha_2 R = \alpha_0 \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right)^2 R$$

$$r_{B1} = r_{C2} = r_{A3} = r_2 + \frac{\alpha_2}{2} = \alpha_0 \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right)^2 R + \frac{\alpha_0}{2} \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right)^2 = \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right)^2 \left(R + \frac{1}{2} \right)$$

Prosiguiendo en esta forma se llega a las siguientes expresiones generales para una posición (m) cualquiera

$$\alpha_m = \alpha_A = \alpha_0 \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right)^m \text{-----} (12)$$

$$\alpha_{m+1} = \alpha_B = \alpha_0 \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right)^{m+1} \text{-----} (13)$$

$$r_A = \alpha_0 \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right)^m \left(R - \frac{1}{2} \right) \text{-----} (14)$$

$$r_m = \alpha_0 R \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right)^m \text{-----} (15)$$

$$r_{Cm} = \alpha_0 \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right)^m \left(R + \frac{1}{2} \right) \text{-----} (16)$$

$$r_{Bm} = \alpha_0 \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \right)^{m+1} \left(R + \frac{1}{2} \right) \text{-----} (17)$$

La relación normal es constante una vez fijo el valor de R, y tiene por expresión, partiendo de la ecuación Núm. 7 y teniendo presentes las ecuaciones (12), (13), (14) y (17):

$$F = \frac{r_B (r_C - r_A)}{r_A (r_B - r_C)} = \frac{r_B}{r_A} \frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} \text{-----} (18)$$

y la resistividad aparente

$$\rho_a = 2 \pi \alpha_A \left(R^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\Delta V_{AC}}{I} \text{-----} (19)$$

O si se considera el factor $\frac{2\pi}{I} = 1$

$$\rho_a = \alpha_A \left(R^2 - \frac{1}{4} \right) \Delta V_{AC} \text{-----} (20)$$

EL PROBLEMA DE LAS DOS CAPAS HORIZONTALES.

Hasta aquí sólo hemos visto la forma general de las ecuaciones de las relaciones de caídas de potencial y de la resistividad aparente; para que se vean las ventajas del método del autor sobre las dos variantes hasta hoy conocidas aplicaremos los tres métodos o modalidades al problema de las dos capas.

En este caso el semi-medio infinito está formado de dos capas (Fig. 5), la superior, de un espesor finito (h), y la inferior, de extensión infinita hacia abajo; ambas capas se consideran homogéneas, isotrópicas y

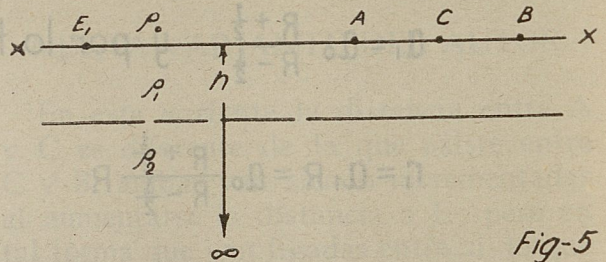


Fig-5

definidas eléctricamente por sus resistividades ρ_1 y ρ_2 . Sobre la superficie límite XX del semi-medio considerado, se tiene un medio de resistividad infinita ρ_0 . La incógnita es la profundidad (h).

El problema de las dos capas es de mucha importancia en la Geofísica Eléctrica por presentarse continuamente en problemas de la Geología y la Ingeniería, y porque puede extenderse al caso de las capas múltiples.

Si I, es la intensidad de la corriente que emerge del punto electrodo E₁ y K el coeficiente de reflexión eléctrica respecto a la capa inferior y que tiene por valor:

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

las diferencias de potencial entre A, C y B en la superficie XX, aplicando la teoría de las imágenes eléctricas de Maxwell, teniendo en cuenta que por ser ρ_0 infinita, el medio superior será un aislador perfecto, tendrán por valor:

$$A = \Delta V_{AC} = \frac{\rho_1 I}{2 \pi} \left[\frac{r_c - r_A}{r_c r_A} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{\sqrt{r_A^2 + (2nh)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_c^2 + (2nh)^2}} \right) \right] \dots (21)$$

$$B = \Delta V_{CB} = \frac{\rho_1 I}{2 \pi} \left[\frac{r_B - r_c}{r_c r_B} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{\sqrt{r_c^2 + (2nh)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_B^2 + (2nh)^2}} \right) \right] \dots (22)$$

En las cuales n, es el número infinito de imágenes de (I).

De las ecuaciones 21 y 22 se deduce fácilmente la expresión general de las relaciones directas de caídas de potencial cualesquiera que sean las separaciones entre A, C y B.

$$\frac{A}{B} = \frac{\Delta V_{AC}}{\Delta V_{CB}} = \frac{\frac{(r_c - r_A)h}{r_A r_c} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_A}{2h}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_c}{2h}\right)^2 + n^2}} \right]}{\frac{(r_B - r_c)h}{r_c r_B} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_c}{2h}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_B}{2h}\right)^2 + n^2}} \right]} \dots (23)$$

Si $\rho_1 = \rho_2$, $K = 0$ y esta ecuación se reduce a la Núm. 7.

Al aplicar las tres variantes del método partiremos de la ecuación 23.

PRIMERA VARIANTE

Sabemos que en este caso

$$r_c - r_A = r_B - r_c = a$$

equidistancia entre los electrodos secundarios, es constante. La ecuación 23 podemos expresarla de la siguiente manera poniendo las distancias r_A y r_B en función de r_c es decir:

$$r_A = r_c - a \quad r_B = r_c + a$$

entonces:

$$\frac{A}{B} = \frac{\Delta V_{AC}}{\Delta V_{CB}} = \frac{\left(\frac{r_c}{a} - 1\right) \frac{r_c}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_c - a}{2h}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_c}{2h}\right)^2 + n^2}} \right]}{\left(\frac{r_c}{a} + 1\right) \frac{r_c}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_c}{2h}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_c + a}{2h}\right)^2 + n^2}} \right]} \dots (24)$$

En esta ecuación aparecen las relaciones $\frac{r_c}{h}$, $\frac{r_c}{a}$ y $\frac{a}{h}$; las dos primeras son variables para cada posición por ser variable r_c , siendo constantes a y h ; la relación $\frac{a}{h}$ será, por lo mismo, constante en una

serie de medidas; de modo que si llamamos a la relación $\frac{r_c}{h} = x$ y $c = \frac{a}{h}$ resulta $\frac{r_c}{a} = \frac{x}{c}$ con lo que nuestra ecuación Núm. 24 podrá expresarse en función de x y c como sigue:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{C}{(X-C)X} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{X-C}{2}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{X^2}{4} + n^2}} \right]}{\frac{C}{(X+C)X} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{X^2}{4} + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{X+C}{2}\right)^2 + n^2}} \right]} \dots \dots \dots (25)$$

con la que se construirán familias de gráficas de interpretación para calcular (h) una vez fijo el valor de c, haciendo variar (x) que es la penetración relativa y dando diversos valores al coeficiente K, que para todos los valores posibles de ρ_1 y ρ_2 varía de + 1 a - 1. En cuanto al número de imágenes (n), basta cuando más tomar hasta 10, porque generalmente las series convergen rápidamente. Calculadas

las relaciones directas $\frac{A}{B}$, se divide la relación normal (F) por ellas para aprovechar finalmente los valores $F \frac{B}{A}$.

Ya en otra ocasión demostré (1) que en el problema de las dos capas la resistividad aparente tiene la siguiente expresión general, referida a la distancia media (r) entre A y C:

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = 1 + 2 \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(2n \frac{h}{a} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{a} + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(2n \frac{h}{a} \right)^2}} \right] \dots \dots (26)$$

Como en la variante que estamos aplicando la distancia (r) varía, y, en cambio, (a) es constante, la relación $\frac{r}{a}$ será variable, en cuanto a la relación $\frac{h}{a}$ para un caso determinado será constante, pero como en cualquiera investigación esta relación se desconoce, supuesto que (h) es incógnita, resulta en realidad para los cálculos de interpretación dicha relación también variable. Esta dificultad, como veremos después, se elimina en la variante del autor.

SEGUNDA VARIANTE

En este caso la equidistancia (a) es variable, y crece en una misma relación fija con la distancia r_c que llamaremos M, por ejemplo, 3 ó 5, en este caso las relaciones $\frac{r_c}{h} = x$ y $\frac{a}{h} = c$ son variables, siendo $M = \frac{r_c}{a} = \frac{x}{c}$, entonces la ecuación (24) podemos transformarla en la siguiente, con lo cual pueden también calcularse y construirse gráficas de interpretación:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{X(M-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{M-1}{M}\right)^2 \frac{X^2}{4} + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{X^2}{4} + n^2}} \right]}{\frac{1}{X(M+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{X^2}{4} + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{M+1}{M}\right)^2 \frac{X^2}{4} + n^2}} \right]} \dots (27)$$

Ya dijimos antes que en este caso las relaciones $\frac{A}{B}$ están desligadas y no es posible obtener la variación continua de la resistividad aparente.

NUEVA VARIANTE

Para establecer la expresión general de las relaciones de caídas de potencial, par-

tiremos, como en los casos anteriores, de la ecuación Núm. (23), dejando la nueva expresión en función de la relación $\frac{r_c}{h}$, para lo cual pondremos las cantidades r_A y r_B en función de r_c , teniendo en cuenta las ecuaciones (14), (16) y (17). Es fácil ver que entre dichas cantidades existen relaciones muy sencillas que son las siguientes:

$$r_A = r_c \frac{R - \frac{1}{2}}{R + \frac{1}{2}} = \frac{r_c}{F}$$

$$r_B = r_c \frac{R + \frac{1}{2}}{R - \frac{1}{2}} = F r_c$$

siendo F la relación normal (ecuación número 18). Por lo tanto, la ecuación general será:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{h}{r_c} (F-1) + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_c}{2Fh}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_c}{2h}\right)^2 + n^2}} \right]}{\frac{h}{r_c} \frac{F-1}{F} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_c}{2h}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{F r_c}{2h}\right)^2 + n^2}} \right]} \dots (28)$$

Finalmente, si llamamos x a la profundidad relativa $\frac{r_c}{h}$ podemos escribir la ecuación anterior como sigue:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{F-1}{X} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{X}{2F}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{X}{2}\right)^2 + n^2}} \right]}{\frac{F-1}{XF} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{X}{2}\right)^2 + n^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{FX}{2}\right)^2 + n^2}} \right]} \quad \text{--- (29)}$$

ecuación que tiene la misma estructura general que las anteriormente establecidas y que sólo depende de la penetración relativa, una vez fija la relación normal F , que depende de la relación $\frac{r}{a} = R$, a la que, generalmente, se le da un valor de 3 ó 5.

La ventaja de este método se ve principalmente por la fácil interpretación de los valores de la resistividad aparente y

su correlación con los de las relaciones $\frac{B}{A} \cdot F$. En efecto, en la ecuación Núm. (26) eliminaremos una de las relaciones, en este caso $\frac{h}{a}$ que la pondremos en función de la relación $R = \frac{r}{a}$ que se fija de antemano, de tal modo que dicha ecuación queda sólo en función de la penetración relativa $\frac{r}{h}$,

$$R = \frac{r}{a}, \quad \frac{h}{a} = R \frac{h}{r}$$

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = 1 + 2 \left(R^2 - \frac{1}{4} \right) \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(R - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2nR \frac{h}{r}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(R + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2nR \frac{h}{r}\right)^2}} \right] \quad \text{--- (30)}$$

Con la que podrán construirse gráficas de interpretación, una vez fijo el valor de R .

Como ejemplo de las variaciones de caídas de potencial, haremos en la ecuación Núm. (29), el valor de $R = 5$, con lo

cual $F = \frac{5.5}{4.5} = 1.2222$ y tendremos la siguiente ecuación particular, corregida por la relación normal F :

$$\frac{B}{A} F = 1.2222 \frac{\frac{0.181818}{X} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{K^n}{\sqrt{0.25x^2 + n^2}} - \frac{K^n}{\sqrt{0.373x^2 + n^2}} \right]}{\frac{0.222222}{X} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{K^n}{\sqrt{0.167x^2 + n^2}} - \frac{K^n}{\sqrt{0.25x^2 + n^2}} \right]} \quad \text{--- (31)}$$

Cuya variación puede verse en la gráfica adjunta, que presenta un máximo cuando la penetración relativa $\frac{r_c}{h} = x$ tiene un valor comprendido entre 2.5 y 3, que nos servirán para calcular la profundidad h en las aplicaciones prácticas.

Como nota final quiero hacer hincapié

en que he aplicado con todo éxito y ventaja esta nueva variante en numerosos problemas de Geofísica Aplicada que he tenido que resolver, en relación con estudios para cimentaciones, aguas subterráneas y de estratigrafía.

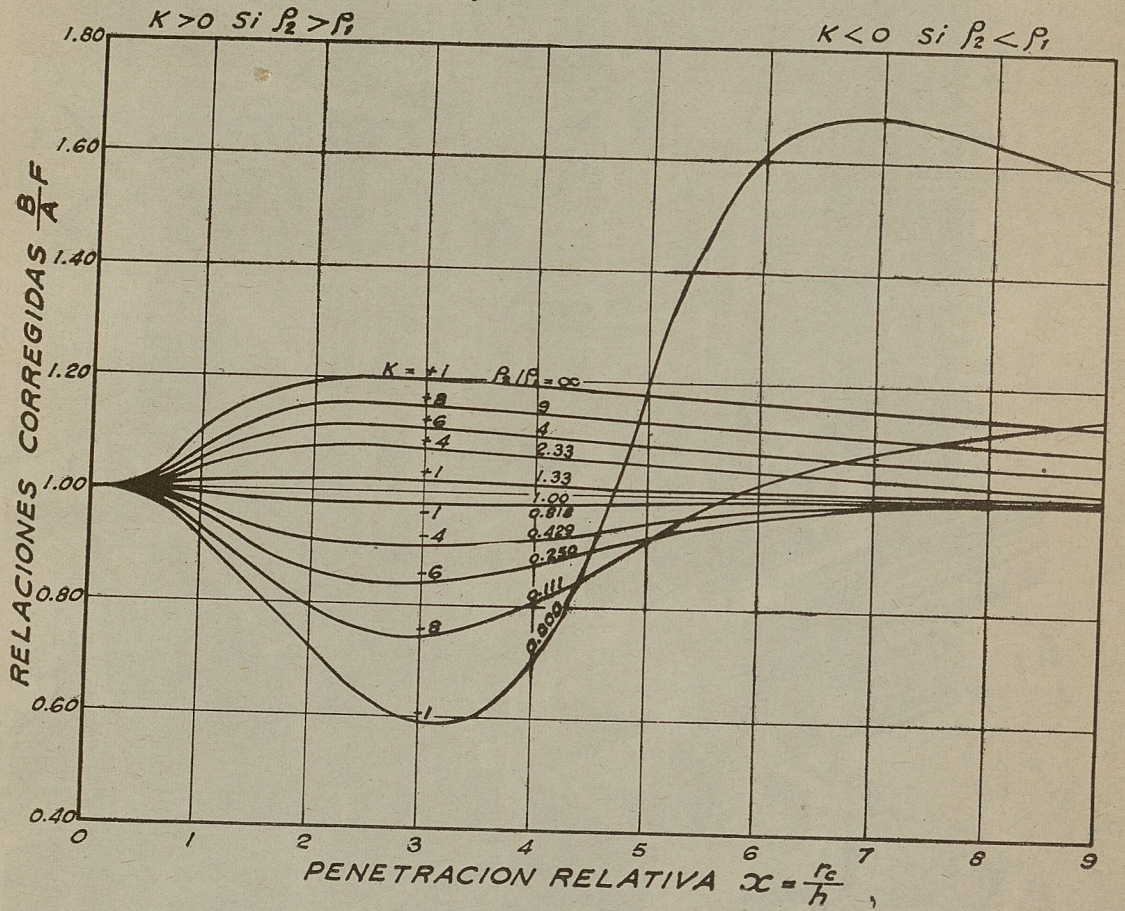
(1) Una nueva expresión teórica de la resistividad aparente en el problema geofísico de las dos capas. Primer Congreso Nacional de Matemáticas (1942).

VARIACION DE LAS RELACIONES DE CAIDA DE POTENCIAL EN LA ALTERNATIVA DEL ING. DE LA O, CUANDO $R = \frac{r_c}{a} = 5, F = \frac{R+0.5}{R-0.5} = 1.222 \dots$

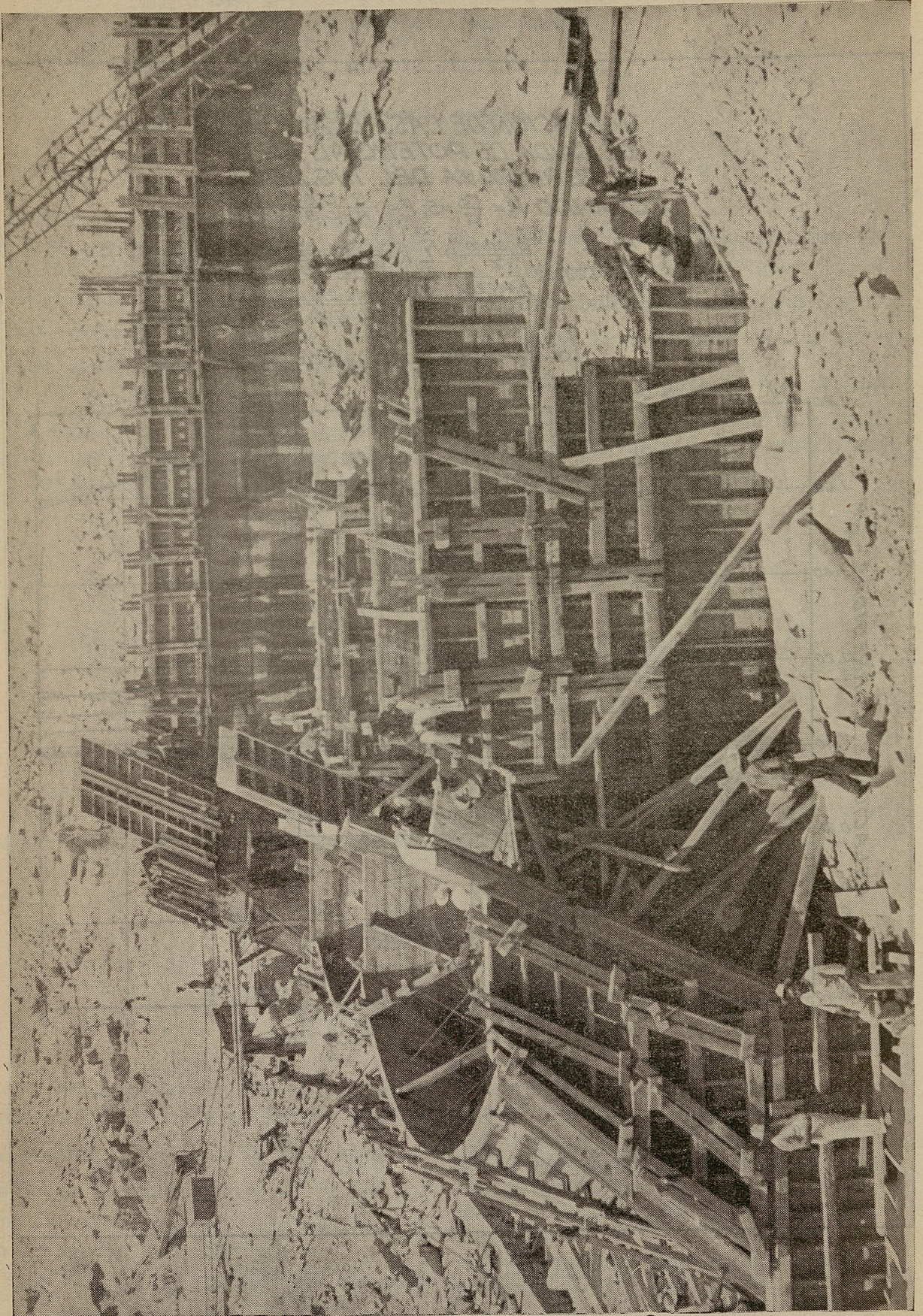
$$\frac{B}{A} F = 1.22222 \frac{0.181818}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{\sqrt{0.25x^2+n^2}} - \frac{1}{\sqrt{0.373x^2+n^2}} \right)$$

$$\frac{B}{A} F = 1.22222 \frac{0.222222}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{\sqrt{0.167x^2+n^2}} - \frac{1}{\sqrt{0.25x^2+n^2}} \right)$$

($x = \frac{r_c}{h}$ Penetración Relativa)



Calcularon:
 Ing. Raúl Oliveros G.
 Efraín Capriles L.



“PRESA LAS VIRGENES”, CHIH.—En primer término, colocando formas en la Cabeza del Machón No. 17; al fondo, el Machón No. 13.