ALGUNOS MÉTODOS ESTADÍSTICOS USADOS EN INVESTIGACIONES PALEOMAGNÉTICAS

JAIME URRUTIA F.*

RESUMEN

Se presenta un breve resumen y discusión de los métodos estadísticos en las investigaciones paleomagnéticas.

INTRODUCCIÓN

Dado el carácter de los datos empleados en los estudios paleomagnéticos, el uso de los métodos estadísticos es obligado para una adecuada interpretación de la información.

En este trabajo se presenta un resumen y análisis de los métodos estadísticos comúnmente empleados en los estudios paleomagnéticos y de algunos otros que podrían ser de utilidad. También se incluye una breve discusión acerca de la confiabilidad de los datos paleomagnéticos.

CONFIABILIDAD DE LOS DATOS PALEOMAGNÉTICOS

La interpretación de los datos de un estudio paleomagnético requiere el empleo de métodos estadísticos, debido a la gran cantidad de factores incluidos en dichos datos. Los resultados serán tanto más confiables, conforme mejor se conozcan las limitaciones de los parámetros que se miden; dentro de esas limitaciones se pueden mencionar:

I) Muestras no representativas. Al colectar las muestras necesarias, ya sean núcleos o muestras de bloque, es difícil lograr un conjunto re-

* Instituto de Geofísica, UNAM.

presentativo. Las porciones de roca no expuestas en la superficie, erosionadas, poco consolidadas o de no fácil acceso, son excluidas del conjunto muestral, por lo que el muestreo es sesgado.

II) Variaciones estadísticas. Además del problema del muestreo sesgado, en el caso del registro de la dirección e intensidad del campo geomagnético se incluye en él una serie de fluctuaciones estadísticas, ya que entre otros factores se tiene la influencia de la anisotropía magnética y las variaciones del campo geomagnético, tales como la variación secular y las variaciones del campo no dipolar y del dipolar.

III) Perturbaciones causadas por el acto de la observación: Estrictamente hablando, no hay forma de efectuar una observación sin alterar, aun en pequeña magnitud, lo que se está observando; por ello, se requiere tratar de reducir al mínimo las perturbaciones causadas. En paleomagnetismo las influencias ajenas se encuentran principalmente en la contaminación magnética de los especímenes (al extraerlos del lugar de afloramiento, al trasladarlos o al prepararlos y medirlos en el laboratorio), ya sea por adición de partículas magnéticas o por afectar sus propiedades magnéticas. De aquí que deba observarse un cuidado especial con los objetos que entren en contacto con los especímenes, de igual forma, con los campos magnéticos o sustancias químicas que puedan afectarlos.

IV) Errores humanos. Errores de esta clase pueden cometerse prácticamente a lo largo de todo el estudio; desde, la localización del lugar de muestreo, orientación y recuperación de las muestras, medición en el laboratorio, hasta la presentación y análisis de los datos. Se deben primordialmente al descuido (leer y/o registrar lecturas erróneas, errores de paralaje, de transcripción de datos, de cálculo, etc.), por lo que es recomendable, repetir las observaciones, utilizar las libretas de campo (no importa que estén maltratadas) y revisar los cálculos.

V) Limitaciones instrumentales. Todos los instrumentos tienen sus limitaciones propias; es necesario conocer éstas para poder aprovechar al máximo las ventajas de los instrumentos, sin incurrir en errores por exigir más de lo que éstos pueden dar. Tal es el caso, por ejemplo de un magnetómetro con baja sensibilidad, los datos de rocas sedimentarias con magnetizaciones de pequeña magnitud serán confiables; de forma parecida, en un desmagnetizador de campos magnéticos alternos decrecientes, si se usa en sedimentarias, en algunos casos se incurrirá en errores ya que el tratamiento no es el más adecuado.

VI) Influencias extrañas. Podemos mencionar dentro de estas influencias, por ejemplo, al orientar magnéticamente una muestra, si hay anomalías magnéticas fuertes entonces la orientación no será confiable. Otra influencia se presenta en laboratorio, durante los procesos de medición o desmagnetización, si el campo geomagnético no es debidamente aislado y afecta la muestra.

MÉTODOS ESTADÍSTICOS

Uno de los objetivos del análisis estadístico es el estudio de la población; en paleomagnetismo, ésta la constituyen los vectores de magnetización, los polos magnéticos y las propiedades magnéticas de las rocas.

Las estadísticas requeridas para caracterizar los vectores de magnetización y los polos magnéticos son las bidimesionales. La más empleada en paleomagnetismo es la propuesta por R. Fisher (1953), conocida como la estadística de distribución esférica. Roberts y Ursell (1960) desarrollaron otra función de distribución sobre una superficie esférica; en ella suponen a las desviaciones del vector de magnetización como la suma de un número infinito de desplazamientos angulares al azar sobre la superficie de la esfera, la diferencia en las funciones de probabilidad cumulativa entre esta distribución y la de Fisher, son pequeñas (Runcorn, 1967). Otra forma alterna de análisis es considerar la distribución normal bidimensional, sin embargo el análisis de Fisher tiene grandes ventajas sobre ésta, dado que directamente toma el caso esférico. Esta distribución se emplea cuando el análisis queda confinado a una porción pequeña de la superficie esférica (McElhinny, 1967).

El método de Fisher se basa en que en forma aproximada se puede suponer a los vectores de magnetización distribuidos en la superficie de una esfera. Proporciona una manera sencilla de comparar las direcciones de los vectores de magnetización y estimar la dirección media; además permite calcular el grado de precisión logrado, con el parámetro estándar circular, el error al 95% y el cono de confiabilidad al 95% (ver apéndice 1).

Otros parámetros que permiten estimar la dispersión respecto a la media, es la desviación estándar angular "δ" y la desviación estándar angular de la media "ξ" (Wilson, 1959); para tamaños de muestras suficientemente grandes, los valores de estos parámetros son semejantes a los obtenidos de la desviación estándar circular (θ_{63}) y del cono de confianza (α_{63}) respectivamente (Creer *et al.*, 1959); para tamaños de muestras más pequeñas, estos últimos valores son mayores (Irving, 1964). Una revisión de la estadística de Wilson se encuentra en Cox (1962).

Además existen varias pruebas estadísticas para probar diferentes aspectos de la distribución de Fisher (ver Apéndice 2); entre ellas la prueba para dispersión al azar de direcciones (Watson, 1956b; Vincenz y Bruckshaw, 1960); para ello también puede emplearse la prueba de campo del conglomerado dada por Graham (1949). Esta prueba se basa en el cálculo de un vector resultante crítico (Ro) a un nivel de probabilidad establecido. El vector resultante (R) de la muestra (N) se compara con los valores de Ro (Tabla 2i) y si R es mayor que Ro la hipótesis de dispersión al azar de direcciones es rechazada.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	—	—	2.62	3.10	3.50	3.85	4.18	4.48	4.76
10	5.03	5.28	5.52	5.75	5.98	6.19	6.40	6.60	6.79	6.98
20	7.17	7.35	7.52	7.69	7.86	8.02	8.18	8.34	8.50	8.65
30	8.80	8.94	9.09	9.23	9.37	9.51	9.65	9.78	9.91	10.04
40	10.17	10.30	10.42	10.55	10.67	10.79	10.90	11.03	11.16	11.26
50	11.37	11.5	11.6	11.7	11.8	11.9	12.0	12.2	12.3	12.4
60	12.5	12.6	12.7	12.8	12.9	13.0	13.1	13.2	13.3	13.4
70	13.5	13.6	13.7	13.8	13.8	13.9	14.0	14.1	14.2	14.3
80	14.4	14.5	14.6	14.7	14.8	14.8	14.9	15.0	15.1	15.2
90	15.3	15.4	15.4	15.5	15.6	15.7	15.8	15.9	15.9	16.0
					100-	16.1				

Tabla 2i. Valores significativos de R_0 para $P = 0.05$. Para $N<51$ están corregidos a dos decimales, para los siguientes se tienen a una decimal (tomada de Irving, 1964).

Otras pruebas son: La prueba de comparación de direcciones medias. Ésta se aplica por ejemplo para comparar dos o más direcciones o posiciones polares dadas. Para ello se calcula la ecuación desarrollada por Watson (1956a) y se usa la prueba estadística F; otra posibilidad de efectuar la comparación es por medio de los conos de confianza (α_{95}) o de la elipse (dp, dm), las direcciones o los polos en cuestión son diferentes; si hay intersección, aun pueden ser significativamente diferentes (McElhinny, 1967) y para ello se emplea la prueba F.

La prueba de comparación de precisiones. Esta prueba hace uso de la comparación de variancias (en los casos de más de dos, se usa la máxima y la mínima) a través de la prueba estadística F (Watson, 1956a); es aplicable cuando la distribución se agrupa alrededor de un valor, en ese caso los parámetros de precisión (K) son los recíprocos de las variancias (McElhinny, 1967). Se emplea para corroborar que la dispersión de direcciones observadas de varias poblaciones diferentes entre sí (Watson, 1956a) o que la precisión difiere entre ellas (Irving, 1964) y también en el análisis estadístico de la prueba del plegamiento (Graham, 1949) por comparación de los valores de K antes y después de las correcciones estructurales (para ello se puede emplear la tabla de cocientes de variancias para diferentes tamaños de muestras dadas por McElhinny, 1964).

Estas pruebas son conocidas como pruebas de hipótesis, de significación o de decisión y como se ha visto son procedimientos para aceptar o rechazar una hipótesis o para comparar diversos parámetros. En estas pruebas los errores posibles son: rechazar la hipótesis cuando debe aceptarse y aceptarla cuando debe rechazarse y la prueba que se adopte debe tender a minimizarlos. Esta selección se basa en el teorema de Neyman-Pearson, conocido como el teorema de la mejor prueba de una hipótesis.

En ocasiones, dado el margen de error involucrado en el estudio, la aplicación de la prueba proporciona resultados ambiguos al encontrarse en los límites entre las regiones de aceptación y de rechazo y un procedimiento para aclarar el resultado es ampliar el número de observaciones. Esto lleva a tener un tamaño de muestra mayor y para decidir cuál es el tamaño adecuado en cada caso y evitar tener tamaños de muestras en defecto o en exceso, se puede recurrir a las llamadas pruebas secuenciales, por medio de éstas, para un determinado nivel de confianza, se tiene el tamaño óptimo de muestra requerida para la prueba.

Entre las pruebas disponibles para las distribuciones normales empleadas para determinar si una muestra cualquiera pertenece a una población de características definidas o para comprobar la equivalencia entre muestras dadas, se tienen: i) La prueba Z, aplicable cuando se conocen los parámetros de la población y basadas en la distribución normal estándar; ii) La prueba T, que emplea los parámetros de pequeñas muestras (menos de 30 elementos) y depende del tamaño de éstas (grados de libertad); cuando el número tiende a infinito teóricamente la prueba es igual a la prueba Z; emplea la distribución t de estudiante; iii) La prueba F, compara la dispersión de los datos a través del cociente de variaciones de las muestras (mayor entre menor) con respecto a la distribución F, esta distribución depende del tamaño de las muestras (grados de libertad). Cuando se desea comparar más de dos variancias, que correspondan a varias características de dos o más muestras de una o varias poblaciones, se puede efectuar a través del análisis de variancias; para ello se supone que las poblaciones tienen distribución normal e igual variancia. El análisis se puede llevar en dos formas, el análisis de un nivel, que emplea la construcción de un conjunto de réplicas (muestras al azar de las muestras originales) y estimar las variancias entre réplicas de una muestra, entre muestras y la total y aplicar la prueba F; en este análisis que requiere que las réplicas puedan ser obtenidas al azar, lo que no siempre es posible; además se involucran fuentes de variación de difícil estimación, por ello, en vez del empleo de réplicas se pueden emplear de las muestras otras características (tratamientos) que constituyen muestras al azar no relacionadas entre sí; de ellas se estiman nuevamente las variancias mencionadas arriba y se aplica la prueba F; este análisis llamado de dos niveles (Tabla 2ii) proporciona mejores resultados (Griffith, 1967; Davis, 1973) y es por lo tanto más empleado.

Se tiene además la prueba chi-cuadrada (X^2) o de Helmert-Pearson, esta prueba puede usarse para determinar la bondad del ajuste de la distribución inferida de la muestra con alguna distribución teórica, no sólo con la normal, por ejemplo con la distribución de Fisher (Watson e Irving, 1956) o con la logarítmica normal. En ella se comparan las distribuciones de frecuencias observadas en la muestra con las esperadas teóricamente, esta comparación sigue la distribución de probabilidad X^2, la cual depende del tamaño de la muestra empleada (grados de libertad). Se aplica en general para tamaños de muestras menores que cuatro, pero igualmente da resultados satisfactorios para valores menores, cuando las frecuencias esperadas son mayores que cinco (las frecuencias esperadas se calculan mediante la distribución X^2). Cuando son dos las variables cuyas frecuencias se trata de comparar, se puede emplear una tabla de contingencias de las dos variables.

Las muestras a estudiar en las investigaciones paleomagnéticas, son de tamaño variable (muestras con diferente número de especímenes, sitios con

TABLA 2ii

ANÁLISIS DE DISPERSIÓN (BASADA EN WATSON E IRVING, 1957)

Variación	*No. de sitios B*	*No. de muestras N*	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Media cuadrada*	*Esperanza de medias cuadradas*	*K*	$\overline{W}$	*Prueba estadística F al 95% de confianza* $\frac{Mc.e.s.}{Mc.d.s.}$ $F_{2(B-1), 2(N-1)}$	*Conclusión*
entre sitios			$2(B-1)$	$\Sigma R_i - R$	$\frac{\Sigma R - R}{2(B-1)}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_d} + \frac{W}{K_e}\right)$	K_e			aceptación hipótesis $f_{cal.} < F_{teor.}$
dentro sitios			$2\{\Sigma(N_i - 1)\}$	$\Sigma(N_i - R_i)$	$\frac{\Sigma(W_i - R_i)}{2\Sigma(W_i - 1)}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{K_d}$	K_d			rechazo hipótesis $f_{cal.}$ $F_{teor.}$
total	$N = N_i$	$2(N-1)$	$N-R$					$\left\{ \left(\frac{1}{B-1}\right) (N - \Sigma W_i^2/N) \right\}$	$f_{cal.}$ $F_{teor.}$	

diferente número de muestras o estudios con diferente número de sitios), sesgadas y de diversos grados de confianza. De aquí que para poder correlacionar y combinar las observaciones existan serias dificultades, para resolverlas se han propuesto diferentes métodos (Irving, 1964), la mayoría basadas en el empleo de la estadística de Fisher (1953).

Otra alternativa la proporcionan las técnicas de inferencia estadística; éstas se basan principalmente en la teoría del muestreo de variables, ya que se trata de obtener información cuantitativa de una población. Entre estas técnicas se tienen los estimadores de intervalos de confianza; éstos proporcionan los intervalos de confianza para la media y la variancia de la población empleando los parámetros obtenidos de las muestras y la distribución t de estudiante para la media y la chi-cuadrada para la variancia. Otras técnicas de valoración son los estimadores puntuales; como los eficientes, de máxima verosimilitud o los bayesianos y los métodos de simulación como los de Monte Carlo (para una explicación de éstos, ver Harbaugh y Bonham-Carter, 1970).

Apéndice 1. Método estadístico de Fisher.

En este método se asume que las direcciones de los vectores de MRN de los distintos especímenes al representarse como puntos sobre la superficie de una esfera se distribuyen con la función de probabilidad dada por:

$$P_A\, dA = \frac{k}{4\pi \operatorname{senh} k} e^{k \cos \theta} \operatorname{sen} \theta \; d\zeta \; d\theta$$

donde: (ζ, θ) son las coordenadas polares de una diferencial de área (dA); (k) es un parámetro que indica la agrupación de las direcciones, si es cero, las direcciones están al azar (uniformemente distribuidas sobre la superficie esférica) y mientras más alto sea su valor, mayor será la agrupación de las direcciones.

La dirección media puede calcularse de:

$$D = tg^{-1} \frac{\sum m_i}{\sum l_i} \qquad\qquad I = sen^{-1} \frac{\sum n_i}{R}$$

donde:

D = declinación media

I = inclinación media

(l_i, m_i, n_i) son los cosenos directores de la i-esima dirección

l_i = cos D_i cos I_i (componente norte)

m_i = sen D_i cos I_i (componente este)

n_i = sen I_i (componente vertical)

R = resultante $= \{(\Sigma l_i)^2 + (\Sigma m_i)^2 + (\Sigma n_i)^2\}^{1/2}$

El parámetro "k" se estima por:

$$k = \frac{N - 1}{N - R}$$

donde N es el número de direcciones estudiadas.

Para poder estimar cualitativa y cuantitativamente el grado de dispersión, es posible calcular el semiángulo (α) de un cono circular situado alrededor de R que agrupe a los puntos a un nivel de confianza dado, el cual, cuando $k > 3$, viene dado por:

$$\alpha_{(1-P)} = \cos^{-1}\left[\left\{1 - \frac{N-R}{R}\left\{(1/P)^{1/(N-1)} - 1\right\}\right\}\right]$$

En los estudios paleomagnéticos convencionales, P es tomado a 0.05, lo que proporciona el cono de confianza α_{95}.

El grado de dispersión también es especificado por el radio (en grados) de círculos con centro en la media verdadera y que contengan el 50, 63 y 95% de las direcciones, éstos se especifican en forma aproximada por:

$$\theta_{50} = \frac{67.5}{(k)^{1/2}} \text{ (grados)}$$

$$\theta_{63} = \frac{81}{(k)^{1/2}} \text{ (grados)}$$

$$\theta_{95} = \frac{140}{(k)^{1/2}} \text{ (grados)}$$

Que representan: el error probable, la desviación estándar circular (análoga a la desviación estándar de la distribución normal bidimensional) y el error al 95% de la distribución normal respectivamente.

Apéndice 2. Pruebas estadísticas.

I. Para probar el grado de dispersión presente en un conjunto de direcciones se tiene la prueba del azar (Watson, 1956b). Se basa en la comparación de la magnitud del vector resultante (R) con un valor crítico (R_0) para cada tamaño de muestra, de tal forma que sí:

a) $R > R_0$ la hipótesis se rechaza y hay una orientación preferencial.

b) $R < R_0$ la hipótesis se acepta y las direcciones están al azar.

Los valores de R_0 para diferentes tamaños de muestra se dan en la tabla 2i para un nivel de confianza del 95%.

II. La comparación de la dispersión de direcciones entre sitios se hace empleando los parámetros de precisión (Watson, 1956a). Utiliza el cociente:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\text{variancia con } 2(N_2 - 1) \text{ grados de libertad}}{\text{variancia con } 2(N_1 - 1) \text{ grados de libertad}}$$

y éste se compara con el valor dado por la distribución "F"; si el valor calculado y el dado por las tablas se encuentran en:

a) $k_1/k_2 > F_2(N_2 - 1),\ 2(N_1 - 1)$ la hipótesis se rechaza y las poblaciones no tienen la misma dispersión de direcciones.

b) $k_1/k_2 < F_2\ (N_2 - 1),\ 2(N_1 - 1)$ la hipótesis se acepta y las direcciones tienen la misma dispersión.

Los valores de "F" para un nivel de significación dado (generalmente del 5%) se obtienen de las tablas estadísticas de la distribución F.

III. La comparación de direcciones medias (Watson, 1956a), para probar si las direcciones medias verdaderas de B poblaciones son idénticas se hace con el parámetro:

$$\frac{2(\sum N_i - B)\ (\sum R_i - R)}{2(B-1)\ \ (\sum N_i - R_i)}$$

Se asume que las poblaciones tienen el mismo valor del parámetro de precisión (k) y se analiza con la prueba F con $2(B-1)$, $2(N_i - B)$ grados de libertad, si se tiene:

a) $\dfrac{2(\sum N_i - B)\ (\sum R_i - R)}{2(B-1)\ \ (\sum N_i - R_i)} > F_{2(B-1),\ 2(\Sigma N_i - B)}$ la hipótesis se rechaza y las poblaciones no tienen igual parámetro de precisión

b) $\dfrac{2(\sum N_i - B)\ (\sum R_i - R)}{2(B-1)\ \ (\sum N_i - R_i)} < F_{2((B-1),\ 2(\Sigma N_i - B)}$ se acepta y las poblaciones tienen igual parámetro k.

Los valores de "F" se obtienen de igual manera que en la prueba anterior.

BIBLIOGRAFÍA

Cox., A., 1962. Aanalysis of present geomagnetic field comparison with paleomagnetic results, *J. Geomagn. Geoelect.*, v. *13*, p. 101-112.

Creer, D. M., E. Irving y A. E. M. Nairn, 1959. Paleomagnetism of the Great Whin Sill, *Geophys. J. Roy. Astrn. Soc.*, v. 2, p. 306-323.

Davis, J. C., 1973. Statistics and Data Analysis in Geology, Wiley, 550 p.

Fisher, R. A., 1953. Dispersion on a sphere, *Proc. Roy. Soc. London, A217*, 295-305.

Graham, J. W., 1949. The stability and significance of magnetism in sedimentary rocks, *J. Geophys. Res.*, v. 54, p. 131-167.

Griffith, J. C., 1967. Scientific method in the analysis of sediments, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 508 p.

Harbaugh, J. W. y G. Bonham-Carter, 1970. Computer Simulation in Geology, Wiley, 575 p.

Irving, E., 1964. Paleomagnetism and Its Application to Geological and Geophysical Problems, Wiley, 399 p.

McElhinny, M. W., 1964. Statistical significance of the fold test in paleomagnetism, *Geophys. J.*, v. 8, p. 338-340.

McElhinny M. W., 1967. Statistics of a spherical distribution, Methods in Paleomagnetism, *in*. Collinson, D. W.; Creer, K. M. y Runcorn, S. K. (eds.), p. 313-321.

ROBERTS, P. H. y H. D. URSELL, 1960. Random walk on a sphere and on a Riemannian Manifold, *Phil. Trans. Roy. Soc. London,* 4252, p. 317-356.

RUNCORN, S. K., 1967. Statistical discussion of magnetization of rock samples, Methods in Paleomagnetism, *in*: Collinson, D. W. Creer, K. M. y Runcorn, S. K., (eds.), p. 329-339.

VINCENZ, S. A. y J. M. G. BRUCKSHAW, 1960. Note on the probability distribution of a small number of vectors, *Proc. Camb. Phil. Soc.,* v. 56, p. 153-159.

WATSON, G. S., 1956a. Analysis of dispersion on a sphere, Monthly Notices Roy. *Astrn. Soc. Geophys. Suppl.,* v. 7, p. 153-159.

WATSON, G. S., 1956b. A test for ramdomness of directions, Monthly Notice Roy. *Astrn. Soc. Geophys. Suppl.,* v. 7, p. 160-161.

WATSON, G. S. y E. IRVING, 1956. Statistical methods in rock magnetism, Monthly Notices Roy. *Astrn. Soc. Geophys. Suppl.* v. 7, p. 289-300.

WILSON, R. L., 1959. Remanent magnetism of Late Secondary and Early Tertiary British rocks, *Phil. Mag.,* v. 4, p. 750-753.