CALCULO DEL ARCO MULTIPLE, CON APOYOS ELASTICOS, PARA EL SIFON DE HUEXOTITLANAPA

(OBRA DE VALSEQUILLO, PUE.)

POR EL ING. JUAN R. *BRELIVET*, DE LA OFICINA DE INGENIERIA EXPERIMENTAL DE LA C. N. I. EN SAN JACINTO, D. F.

A) DESCRIPCION
(Véase Fig. 1)

La estructura se compone de tres arcos iguales, con los apoyos a nivel. Los arcos extremos están empotrados en las laderas, los apoyos intermedios los constituyen dos pilas de concreto, empotrados en el fondo del río. Los arcos están ligados rígidamente a las pilas. El sifón descansa sobre trabes horizontales que transmiten la carga a los arcos por medio de marcos verticales, figura 1.

B) CONSIDERACIONES GENERALES PARA EL CALCULO

La línea media de cada arco es, aproximadamente, una parábola. Tomando para cada arco el origen en la clave y los sentidos positivos indicados en la figura 2, la ecuación de la línea media es:

$$y = \frac{f}{a^2} x^2 = K x^2$$

donde **f** es la flecha y **a** el semi-claro.

Como el método usado para el cálculo de los esfuerzos, da lugar, como se verá adelante, a la integración de expresiones donde entra $\frac{ds}{I}$, siendo **ds** un elemento de arco de la línea media, e **I** el momento de inercia de la sección correspondiente, hay necesidad para la simplificación de los cálculos, que $\frac{ds}{I}$ tenga una forma sencilla.

Ahora bien:

$$ds = dx\sqrt{1 + (y^1)^2} = dx\sqrt{1 + 4K^2 x^2}$$

Los cálculos se acortan si se pueden transformar las expresiones que intervienen en las integrales, de tal modo que sean funciones racionales de las líneas trigonométricas o hiperbólicas de cierto ángulo.

En el caso que nos ocupa, se encontró que el cambio de variable que daba las expresiones más sencillas era a base de líneas hiperbólicas. La expresión **ds**, por el cambio de variable

$$x = \frac{1}{2K} \operatorname{Sh} \varphi \quad \text{se vuelve:} \quad ds = \frac{\operatorname{Ch}^2 \varphi}{2K} d\varphi$$

La variación de espesor del arco se puede entonces representar aproximadamente, de acuerdo con los dibujos suministrados por las Oficinas Centrales, por la ley:

$$h = h_o \, Ch^2 \varphi$$

El momento de inercia I se expresa entonces por:

$$I = I_o \, Ch^6 \varphi$$

Siendo I_o el momento de inercia en la clave.

La expresión $\frac{ds}{I}$ se escribe entonces:

$$\frac{ds}{I} = \frac{d\varphi}{2KI_o \, Ch^4 \varphi}$$

C) PROCEDIMIENTO GENERAL DE CALCULO

1º Método general

La resolución de una estructura hiperestática cuando el grado de redundancia no pasa de cuatro o cinco, puede encontrarse con tanta o más rapidez que por cualquier otro método, con la ventaja de una mayor exactitud, expresando que la energía de deformación es un mínimo. Basta tener una buena máquina de calcular.

En el desarrollo que sigue se tomó en cuenta únicamente la energía de flexión, ya que las de compresión y de corte son despreciables, como lo mostraron algunos cálculos preliminares. En todos los casos tratados, como se demostrará más adelante, el sistema es simétrico o antisimétrico, de tal modo que basta calcular las expresiones de las derivadas de la energía de flexión para un arco y medio y una pila. (Véase figura 3.)

La energía

$$U_{AD} = U_{AB} + U_{BC} + U_{KC} + U_{CD}$$

Si X es cualquiera de las incógnitas que hacen el sistema hiperestático hay que expresar que: (energía mínima)

$$\frac{\delta U_{AD}}{\delta X} = \frac{\delta U_{AB}}{\delta X} + \frac{\delta U_{BC}}{\delta X} + \frac{\delta U_{KC}}{\delta X} + \frac{\delta U_{CD}}{\delta X} = 0$$

Como las derivadas son funciones lineales de las incógnitas se obtendrán así tantas ecuaciones de primer grado como hay de incógnitas. La resolución del sistema lineal así obtenido da la solución del problema.

En la práctica, para arcos simétricos como en el caso estudiado, el cálculo más largo es el de $\delta U_{AB}/\delta X$ ya que se verá que $\delta U_{BC}/\delta X$ y $\delta U_{CD}/\delta X$ pueden expresarse fácilmente en función de $\delta U_{AB}/\delta X$. La derivada $\delta U_{KC}/\delta X$, relativa a la pila, se encuentra con facilidad.

El cálculo de $\dfrac{\delta U_{AB}}{\delta X}$ se hace como sigue: (Véase figura 4.)

Sea **P** un punto cualquiera del arco **AB**. Sean M_1, V_1, H_1, respectivamente, el momento y las reacciones en **A**, que se trata de calcular y sea q_1 el momento de las fuerzas aplicadas en el tramo **AP**, con respecto a **P**.

El momento flexionante M_p en **P** es:

$$M_p = m_1 V_1 + n_1 H_1 + M_1 + q_1$$

$$\text{Donde} \quad m_1 = \overline{AP^1} \quad ; \quad n = \overline{P^1P}$$

La energía elemental de flexión correspondiente a un elemento **ds** alrededor de **P** es:

$$dU_{AB} = \frac{M_P^2\, ds}{2EI}$$

La energía total de **A** a **B** es:

$$U_{AB} = \frac{1}{2E}\int_A^B \frac{M_P^2\, ds}{I}$$

Las derivadas que se trata de calcular son:

$$\frac{\delta U_{AB}}{\delta V_1}, \quad \frac{\delta U_{AB}}{\delta H_1} \quad \text{y} \quad \frac{\delta U_{AB}}{\delta M_1}$$

$$\frac{\delta U_{AB}}{\delta V_1} = \frac{1}{2E}\int_A^B 2\, M_p \frac{\delta M_P}{\delta V_1} \cdot \frac{ds}{I} = \frac{1}{E}\int_A^B \frac{(m_1 V_1 + n_1 H_1 + M_1 + q_1)\, m_1\, ds}{I}$$

ó bien:

$$E\,\frac{\delta U_{AB}}{\delta V_1} = V_1\int_A^B m_1^2 \frac{ds}{I} + H_1\int_A^B m_1 n_1 \frac{ds}{I} + M_1\int_A^B m_1 \frac{ds}{I} + \int_A^B m_1 q_1 \frac{ds}{I}\ .$$

Del mismo modo:

$$E\frac{\delta U_{AB}}{\delta H_1} = V_1\int_A^B m_1 n_1 \frac{ds}{I} + H_1\int_A^B n_1^2 \frac{ds}{I} + M_1\int_A^B n_1 \frac{ds}{I} + \int_A^B n_1 q_1 \frac{ds}{I}\,.$$

y

$$E\frac{\delta U_{AB}}{\delta M_1} = V_1\int_A^B m_1 \frac{ds}{I} + H_1\int_A^B n_1 \frac{ds}{I} + M_1\int_A^B \frac{ds}{I} + \int_A^B q_1 \frac{ds}{I}\,.$$

Se ve que intervienen seis integrales diferentes como coeficientes de $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{H_1}$ y $\mathbf{V_1}$, que dependen exclusivamente de las dimensiones del arco, mientras que tres dependen de las cargas aplicadas también.

Los valores de las seis primeras serán constantes del arco y servirán para cualquier caso de carga estudiado.

En el caso tratado, con las notaciones de la figura 4 es fácil ver que: $\mathbf{m_1 = a + x}$, $\mathbf{n_1 = y - f}$ y que:

$$\text{(I)} = \int_A^B m_1 \frac{ds}{I} = \int_{-a}^{0} \frac{(a+x)\sqrt{1+4K^2X^2}}{I}\,dx$$

$$\text{(II)} = \int_A^B n_1 \frac{ds}{I} = \int_{-a}^{0} \frac{(y-f)\sqrt{1+4K^2X^2}}{I}\,dx = K\int_{-a}^{0} \frac{(X^2-a^2)\sqrt{1+4K^2X^2}}{I}\,dx$$

$$\text{(III)} = \int_A^B \frac{ds}{I} = \int_{-a}^{0} \frac{\sqrt{1+4K^2X^2}}{I}\,dx$$

$$\text{(IV)} = \int_A^B \frac{m_1 n_1\,ds}{I} = \int_{-a}^{0} \frac{(a+x)(KX^2-f)\sqrt{1+4K^2X^2}}{I}\,dx = K\int_{-a}^{0} \frac{(a+x)(X^2-a^2)\sqrt{1+4K^2X^2}}{I}\,dx$$

$$\text{(V)} = \int_A^B m^2 \frac{ds}{I} = \int_{-a}^{0} \frac{(a+x)^2\sqrt{1+4K^2X^2}}{I}\,dx$$

$$\text{(VI)} = \int_A^B n^2 \frac{ds}{I} = \int_{-a}^{0} \frac{(KX^2-f)^2\sqrt{1+4K^2X^2}}{I}\,dx = K^2\int_{-a}^{0} \frac{(X^2-a^2)^2\sqrt{1+4K^2X^2}}{I}\,dx$$

Con el cambio de variable indicado: $X = \frac{1}{2K}\,\mathrm{Sh}\,\phi$ y con la ley $\mathbf{I = I_o\,Ch^6}\,\phi$, se obtiene:

$$\text{(I)} = \frac{a}{2KI_o}\int_{\varphi_o}^{0} \frac{d\varphi}{Ch^4\varphi} + \frac{1}{(2K)^2 I_o}\int_{\varphi_o}^{0} \frac{Sh\varphi}{Ch^4\varphi}\,d\varphi.$$

$$\text{(II)} = \frac{1}{2(2K)^2 I_o}\int_{\varphi_o}^{0} \frac{Sh^2\varphi}{Ch^4\varphi}\,d\varphi - \frac{a^2}{2I_o}\int_{\varphi_o}^{0} \frac{d\varphi}{Ch^4\varphi}\,.$$

$$\text{(III)} = \frac{1}{2KI_0}\int_{\varphi_0}^{0}\frac{d\varphi}{Ch^4\varphi}$$

$$\text{(IV)} = \frac{1}{2(2K)^3I_0}\int_{\varphi_0}^{0}\frac{Sh^3\varphi d\varphi}{Ch^4\varphi} + \frac{a}{2(2K)^2I_0}\int_{\varphi_0}^{0}\frac{Sh^2\varphi}{Ch^4\varphi}d\varphi - \frac{a^2}{2(2K)I_0}\int_{\varphi_0}^{0}\frac{Sh\varphi}{Ch^4\varphi}d\varphi - \frac{a^3}{2I_0}\int_{\varphi_0}^{0}\frac{d\varphi}{Ch^4\varphi}$$

$$\text{(V)} = \frac{a^2}{2KI_0}\int_{\varphi_0}^{0}\frac{d\varphi}{Ch^4\varphi} + \frac{2a}{(2K)^2I_0}\int_{\varphi_0}^{0}\frac{Sh\varphi}{Ch^4\varphi}d\varphi + \frac{1}{(2K)^3I_0}\int_{\varphi_0}^{0}\frac{Sh^2\varphi}{Ch^4\varphi}d\varphi.$$

$$\text{(VI)} = \frac{1}{4(2K)^3I_0}\int_{\varphi_0}^{0}\frac{Sh^4\varphi}{Ch^4\varphi}d\varphi - \frac{a^2}{2(2K)I_0}\int_{\varphi_0}^{0}\frac{Sh^2\varphi}{Ch^4\varphi}d\varphi + \frac{2K}{4I_0}a^4\int_{\varphi_0}^{0}\frac{d\varphi}{Ch^4\varphi}$$

Siendo φ el argumento correspondiente a $x = -a$.

Llamando:

$$A = \int_{\varphi_0}^{0}\frac{d\varphi}{Ch^4\varphi}\ ;\ B = \int_{\varphi_0}^{0}\frac{Sh\varphi}{Ch^4\varphi}d\varphi\ ;\ C = \int_{\varphi_0}^{0}\frac{Sh^2\varphi}{Ch^4\varphi}d\varphi\ ;\ D = \int_{\varphi_0}^{0}\frac{Sh^3\varphi}{Ch^4\varphi}d\varphi;\ E = \int_{\varphi_0}^{0}\frac{Sh^4\varphi}{Ch^4\varphi}d\varphi$$

Se obtiene:

$$\text{(I)} = \frac{a}{2KI_0}A + \frac{1}{(2K)^2I_0}B$$

$$\text{(II)} = \frac{1}{2(2K)^2I_0}C - \frac{a^2}{2I_0}A$$

$$\text{(III)} = \frac{1}{2KI_0}A$$

$$\text{(IV)} = \frac{1}{2(2K)^3I_0}D + \frac{a}{2(2K)^2I_0}C - \frac{a^2}{2(2K)I_0}B - \frac{a^3}{2I_0}A.$$

$$\text{(V)} = \frac{a^2}{2KI_0}A + \frac{2a}{(2K)^2I_0}B + \frac{1}{(2K)^3I_0}C$$

$$\text{(VI)} = \frac{1}{4(2K)^3I_0}E - \frac{a^2}{2(2K)I_0}C + \frac{2Ka^4}{4I_0}A$$

Las integrales **A, B, C, D** no tienen mayores dificultades.

Se encuentra:

$$A = \left[\tan h\,\varphi - \frac{\tan h^3\varphi}{3}\right]_{\varphi_0}^{0} = \tan h\,\varphi_0\left[-1 + \frac{1}{3}\tan h^2\varphi_0\right]$$

$$B = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{Ch^3\varphi}\right]_{\varphi_0}^{0} = -\frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{Ch^3\varphi_0}\right]$$

$$C = \frac{1}{3}\left[\tan h^3\varphi\right]_{\varphi_0}^{0} = -\frac{1}{3}\tan h^3\varphi_0$$

$$D = \left[-\frac{1}{Ch\varphi} + \frac{1}{3}\frac{1}{Ch^3\varphi}\right]_{\varphi_0}^{0} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{Ch\varphi_0} - \frac{1}{3}\frac{1}{Ch^3\varphi_0}$$

$$\text{Con} \quad Sh\,\varphi_0 = -2Ka = -2\frac{f}{a}$$

$$Ch\,\varphi_0 = \sqrt{1 + 4\frac{f^2}{a^2}}$$

El cálculo de las integrales que intervienen como constantes del arco es, pues, fácil y rápido.

El cálculo de las tres integrales que dependen de la carga aplicada se hará más adelante, a propósito de cada caso de carga.

Es posible deducir fácilmente en el caso de arcos simétricos como en este problema, las integrales I', II', III', IV', V', VI' relativas al arco BC, que intervienen en este problema, derivadas de U_{BC}. (Véase figura 5.)

Tomando dos puntos simétricos P_1 y P_2, con respecto al eje vertical que pasa por la clave, se tiene:

$$m_2 = a + x_2 = a - x_1$$

$$\text{pero:} \quad m_1 = a + x_1 \quad \text{y entonces:} \quad m_2 = 2a - m_1$$

$$\text{y} \quad n_1 = n_2$$

De las relaciones entre m_1 y m_2, por una parte, y entre n_1 y n_2, por otra parte, se tiene:

$$\text{I}' = \int_0^a m_2 \frac{ds}{I} = \int_{-a}^{0} (2a - m_1)\frac{ds}{I} = 2a\,\text{III} - \text{I}$$

$$\text{II}' = \int_0^a n_2 \frac{ds}{I} = \int_{-a}^{0} n_1 \frac{ds}{I} = \text{II}$$

$$\text{(III)}' = \int_0^a \frac{ds}{I} = \int_{-a}^0 \frac{ds}{I} = \text{(III)}.$$

$$\text{(IV)}' = \int_0^a m_2 n_2 \frac{ds}{I} = \int_{-a}^0 (2a - m_1) n_1 \frac{ds}{I} = 2a\,\text{(II)} - \text{(IV)}$$

$$\text{(V)}' = \int_0^a m_2^2 \frac{ds}{I} = \int_{-a}^0 (4a^2 - 4am_1 + m_1^2) \frac{ds}{I} = 4a^2\,\text{(III)} - 4a\,\text{(I)} + \text{(V)}$$

$$\text{(VI)}' = \int_0^a n_2^2 \frac{ds}{I} = \int_{-a}^0 n_1^2 \frac{ds}{I} = \text{(VI)}$$

Lo que permite calcular rápidamente los coeficientes de **V, M, H,** en las derivadas de la energía relativas al arco BC.

Una vez calculadas las integrales "constantes del arco", se procede al estudio de cada caso particular de carga aplicada.

2º Cálculo del arco para el sistema de cargas verticales aplicadas
(Véase figura 6)

El sistema de cargas se compone del peso propio del arco, del de las pilas, del peso de la tubería con sus apoyos, contando el peso del agua.

Se consideró para el cálculo que el peso transmitido por cada marco vertical al arco se repartía uniformemente en el tramo correspondiente del arco. Como son varios marcos distantes de 3 metros, el error en el cálculo de las magnitudes hiperestáticas es pequeño, pudiéndose, una vez calculadas éstas, tomar en cuenta las discontinuidades introducidas por los puntos de concentración de cargas para obtener los diagramas de momentos y esfuerzos cortantes más exactos.

Sumando la línea de carga así obtenida con la que corresponde al peso propio del arco, se encontró que la carga vertical ω_v por metro podía escribirse en la forma:

$$\omega_v = b + c\,x^2$$

El problema consiste ahora en calcular las integrales:

$$\text{(VII)} = \int_{-a}^0 q_1 \frac{ds}{I}, \quad \text{(VIII)} = \int_{-a}^0 m_1 q_1 \frac{ds}{I}, \quad \text{(IX)} = \int_{-a}^0 n_1 q_1 \frac{ds}{I}$$

Siendo q_1 el momento de todas las fuerzas ω_v aplicadas a la izquierda del punto P, de abscisa x,

Se tiene:

$$\omega_v = (b + cu^2)\,du$$

$$dq_1 = (b + cu^2)(u - x)\,du$$

$$y \quad q_1 = \int_{-a}^x (b + cu^2)(u - x)\,du$$

La integración es inmediata y da, ordenada con respecto a x:

$$q_1 = -\frac{c}{12}x^4 - \frac{b}{2}x^2 - \frac{a}{3}(3b + a^2c)x - \frac{1}{4}a^2(2b + a^2c) =$$

$$= -\frac{c}{12}\frac{Sh^4\varphi}{(2K)^4} - \frac{b}{2}\frac{Sh^2\varphi}{(2K)^2} - \frac{a}{3}(3b + a^2c)\frac{Sh\varphi}{2K} - \frac{1}{4}a^2(2b + a^2c).$$

$$q_1\frac{ds}{I} = -\left[\frac{c}{12}\frac{1}{I_o(2K)^5}\frac{Sh^4\varphi}{Ch^4\varphi} + \frac{b}{2}\frac{1}{I_o(2K)^3}\frac{Sh^2\varphi}{Ch^4\varphi} + \frac{a(3b + a^2c)}{3I_o(2K)^2}\frac{Sh\varphi}{Ch^4\varphi} + \frac{a^2}{4}\frac{(2b + a^2c)}{I_o(2K)Ch^4\varphi}\right]d\varphi$$

Del mismo modo se obtiene:

$$m_1 q_1\frac{ds}{I} = \left[\frac{c}{12}\frac{1}{I_o(2K)^6}\frac{Sh^5\varphi}{Ch^4\varphi} - \frac{ac}{12}\frac{1}{I_o(2K)^5}\frac{Sh^4\varphi}{Ch^4\varphi} - \frac{b}{2}\frac{1}{I_o(2K)^4}\frac{Sh^3\varphi}{Ch^4\varphi} - \frac{a}{6}\frac{(9b + 2a^2c)}{I_o(2K)^3}\frac{Sh^2\varphi}{Ch^4\varphi} - \frac{a^2}{12}\frac{18b + 7a^2c}{I_o(2K)^2}\frac{Sh\varphi}{Ch^4\varphi} - \frac{a^3}{4}\frac{2b + a^2c}{I_o(2K)}\frac{1}{Ch^4\varphi}\right]d\varphi$$

y:

$$n_1 q_1\frac{ds}{I} = \left[-\frac{c}{24}\frac{Sh^6\varphi}{I_o(2K)^6Ch^4\varphi} + \frac{ca^2 - 6b}{24I_o(2K)^4}\frac{Sh^4\varphi}{Ch^4\varphi} - \frac{a(3b + a^2c)}{6I_o(2K)^3}\frac{Sh^3\varphi}{Ch^4\varphi} - \frac{a^4c}{8I_o(2K)^2}\frac{Sh^2\varphi}{Ch^4\varphi} + \frac{a^3}{6}\frac{3b + a^2c}{I_o(2K)}\frac{Sh\varphi}{Ch^4\varphi} + \frac{a^4(2b + a^2c)}{8I_o}\frac{1}{Ch^4\varphi}\right]d\varphi$$

Finalmente (VII), (VIII) y (IX) se ponen en la forma:

$$(VII) = \int_{-a}^{0}\frac{q_1 ds}{I} = -\frac{cE}{12I_o(2K)^5} - \frac{bC}{2I_o(2K)^3} - \frac{a(3b + a^2c)B}{3I_o(2K)^2} - \frac{a^2(2b + a^2c)A}{4I_o(2K)}$$

$$(VIII) = \int_{-a}^{0}\frac{m_1 q_1 ds}{I} = -\frac{cF}{12I_o(2K)^6} - \frac{acE}{12I_o(2K)^5} - \frac{bD}{2I_o(2K)^4} - \frac{a}{6}\frac{9b + 2a^2c}{I_o(2K)^3}C -$$

$$-\frac{a^2}{12}\frac{(18b + 7a^2c)}{I_o(2K)^2}B - \frac{a^3}{4}\frac{2b + a^2c}{2KI_o}A.$$

$$\text{(IX)} = \int_{-a}^{0} \frac{n_1 q_1 ds}{I} = -\frac{cG}{24(2K)^6 I_o} + \frac{ca^2 - 6b}{24(2K)^4 I_o} E - \frac{a}{6}\,\frac{3b + a^2c}{I_o(2K)^3} D -$$

$$-\frac{a^4 c C}{8I_o(2K)^2} + \frac{a^3(3b + a^2c)}{6I_o(2K)} B + \frac{a^4(2b + a^2c)}{8I_o} A$$

Las integrales **A, B, C, D**, ya se calcularon en la anterior, las demás valen:

$$E = \int_{\varphi_o}^{0} \frac{Sh^4\varphi}{Ch^4\varphi} d\varphi = \left[-\tan h\varphi - \frac{1}{3}\tan h^3\varphi + \frac{1}{2}\log_e \frac{1+\tan h\varphi}{1-\tan h\varphi}\right]_{\varphi_o}^{0} =$$

$$= \tan h\varphi_o + \frac{1}{3}\tan h^3\varphi_o - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\log_{10} e}\log_{10} \frac{1+\tan h\varphi_o}{1-\tan h\varphi_o}.$$

$$F = \int_{\varphi_o}^{0} \frac{Sh^5\varphi}{Ch^4\varphi} d\varphi = \left[Ch\varphi + \frac{2}{Ch\varphi} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{Ch^3\varphi}\right]_{\varphi_o}^{0} = \frac{8}{3} - Ch\varphi_o - \frac{2}{Ch\varphi_o} + \frac{1}{3Ch^3\varphi_o}$$

$$G = \int_{\varphi_o}^{0} \frac{Sh^6\varphi}{Ch^4\varphi} d\varphi = \left[\frac{\tan h^3\varphi}{3} + 2\tan h\varphi - \frac{5}{4}\log_e \frac{1+\tan h\varphi}{1-\tan h\varphi} + \frac{1}{2}\,\frac{\tan h\varphi}{1-\tan h^2\varphi}\right]_{\varphi_o}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{2} Sh\varphi_o\, Ch\varphi_o - \frac{1}{3}\tan h^3\varphi_o - 2\tan h\varphi_o + \frac{5}{4}\,\frac{1}{\log_{10} e}\log_{10} \frac{1+\tan h\varphi_o}{1-\tan h\varphi_o}.$$

Para el cálculo de las derivadas de la energía correspondientes a U_{BC} se pueden también encontrar relaciones sencillas entre las integrales (VII)′, (VIII)′, (IX)′ y las integrales ya conocidas.

Tomando otra vez dos puntos simétricos con respecto al eje vertical que pasa por la clave y llamando $\Sigma\omega_v$ la suma de las fuerzas verticales aplicadas, relativas a un semi-arco, se tendrá la relación siguiente entre el momento q_1 de las fuerzas aplicadas con respecto a P_1 y el momento q_2 de las fuerzas aplicadas, con respecto a P_2:

$$q_2 = -2(a - m_1)\Sigma\omega_v + q_1$$

De donde:

$$\text{(VII)}' = -2[a \times \text{(III)} - \text{(I)}]\Sigma\omega_v + \text{(VII)}$$

$$m_2 q_2 = (2a - m_1)[q_1 - (a - m_1) 2\Sigma\omega_v]$$

De donde:

$$\mathrm{(VIII)}' = -\left[2a^2\,\mathrm{(III)} - 3a\,\mathrm{(I)} + \mathrm{(V)}\right] \times 2\Sigma\omega_v + 2a\,\mathrm{(VII)} - \mathrm{(VIII)}$$

$$n_2 q_2 = -\left[a n_1 - n_1 m_1\right] 2\Sigma\omega_v + n_1 q_1$$

De donde:

$$\mathrm{(IX)}' = -\left[a\,\mathrm{(II)} - \mathrm{(IV)}\right] 2\Sigma\omega_v + \mathrm{(IX)}$$

Una vez calculadas las derivadas de la energía relativas al arco A, B, C, basta escribir:

$$\frac{\delta U_{AB} + \delta U_{BC}}{\delta V_1} = 0, \quad \frac{\delta U_{AB} + \delta U_{BC}}{\delta H_1} = 0, \quad \frac{\delta U_{AB} + \delta U_{BC}}{\delta M_1} = 0 \, .$$

Las tres ecuaciones anteriores dan un sistema lineal que permite calcular M_1 V_1 H_1.

Se notará que no se hizo aquí intervenir la pila como apoyo elástico. Se puede demostrar, en efecto, que cuando se trata de arcos simétricos con respecto a la clave y cargados simétricamente también con respecto a la clave y tales que la unión de un arco al que le sigue sea rígida, el coceo es nulo en las pilas que los soportan. La demostración, a partir de las ecuaciones de la energía está hecha en el apéndice, al final del informe.

Basándose en lo anterior, se puede resolver la estructura, en cuanto a cargas verticales, aislando un arco, la V_1 está entonces determinada e igual a $\Sigma\omega_v$, quedan únicamente dos incógnitas, M_1 y H_1 y el método de la energía se acorta todavía, dando lugar a un sistema de dos incógnitas. No obstante, con la consideración de V_1 como incógnita, los cálculos que resultan no son mucho más largos y tienen la ventaja de dar una verificación, ya que la resolución del sistema de 3 ecuaciones (que no toma en cuenta las ecuaciones de equilibrio) debe dar $V_1 = \Sigma\omega_v$

3º Cálculo del arco para el sistema de cargas horizontales aplicadas

Este cálculo se hizo para tomar en cuenta el efecto de un temblor cuya dirección pudiera ser ya sea en el plano del arco, ya sea normal al arco. El caso de un temblor normal al plano del arco está estudiado en un memorándum anterior.

En cada caso las fuerzas de inercia se calcularon con una aceleración de $\frac{1}{10}$ g

Temblor de dirección horizontal obrando paralelamente al plano del arco

Las fuerzas horizontales aplicadas resultan de la masa de los arcos y de las pilas, por una parte, y de la masa de la tubería con sus soportes, por otra parte.

Como el agua puede desalojarse casi libremente en el sentido longitudinal de la tubería no transmitirá ninguna reacción horizontal apreciable a los arcos.

Las fuerzas de inercia transmitidas a los arcos por la tubería se considerarán concentradas en la clave de cada arco ya que la rigidez de los marcos verticales a la flexión es relativamente pequeña.

La determinación del grado de hiperestaticidad en este caso se hace como sigue: figuras 7a, 7b, 7b′ 7c.

Considerando aplicada una fuerza horizontal **F** en un punto **P** del arco (1) situada a una distancia **p** de la ladera, el sistema de reacciones de los apoyos será: x_1, x_2, x_3, x_4 — (Véase figura 7a.). Cada sistema de reacciones X_i da lugar a 3 componentes que serán 2 de fuerzas: V_i y H_i, y una de momentos, o sea M_i —. En total son 12 incógnitas. Pero en el caso particular tratado, el problema se simplifica considerablemente, como se demuestra adelante.

Considerando ahora la misma fuerza **F** aplicada al arco (3) a la distancia **p** de la ladera derecha, el sistema de reacciones, debido a la simetría de la estructura se convierte en el indicado en la figura 7b.

Ahora, si la fuerza **F** de la figura 7b se aplica en un sentido opuesto, el sistema de reacciones será el de la figura 7b′. Si se superponen los sistemas 7a y 7b′, se obtiene la figura 7c, que corresponde exactamente a las condiciones del problema tratado aquí. Si se ve que el sistema de reacciones es antisimétrico puro, con respecto al plano vertical que pasa por la clave del arco (2), el grado de redundancia se reduce entonces de 12 a 6, obteniéndose la figura 8, donde intervienen las componentes de las reacciones.

Este sistema puede todavía reducirse a 4 incógnitas, como se verá en el desarrollo del cálculo, cuando se tomen en cuenta las ecuaciones de equilibrio.

La consideración de la antisimetría del sistema junto con las ecuaciones de equilibrio muestra que basta calcular las derivadas de la energía desde una ladera hasta la clave del arco central.

Se procede como en el caso de las fuerzas verticales. Hay que calcular las integrales (VII), (VIII), (IX), relativas al sistema de cargas horizontales.

Estas son de dos tipos, las debidas a la masa de los arcos y de las pilas y las debidas a la masa de la tubería.

I. Cargas horizontales debidas a la masa de los arcos y de las pilas

La ley de carga, de un arco, de acuerdo con las dimensiones de los dibujos se puede escribir con una buena aproximación.

$$\omega_{1h} = d + ex^2$$

ω_{1h} es la carga por unidad de abscisa x:

El cálculo de $(\mathrm{VII})_h = \int_{-a}^{0} q_{1h} \frac{ds}{I}$ se hace como sigue:

(Véase fig. 9)

Se tiene: $dq_{1h} = -\omega_{1h} \cdot PN \cdot du$, $\overline{PN} = K(u^2 - x^2)$, de donde

$$dq_{1h} = -K(d + eu^2)(u^2 - x^2)du.$$

$$q_{1h} = \int_{-a}^{x} -K(d+eu^2)(u^2-x^2)du = -K\left[e\frac{u^5}{5} + (d - ex^2)\frac{u^3}{3} - d \cdot x^2 u\right]_{-a}^{x}$$

$$q_{1h}=K\left[2\frac{e}{15}x^5+\frac{2d}{3}x^3+\frac{a}{3}(3d+a^2e)x^2-\frac{a^3}{15}(5d+3ea^2)\right]$$

La integral (VII)$_h$ se calcula ahora sustituyendo x por $\frac{Sh\varphi}{2K}$

Se encuentra:

$$(VII)_h=\frac{eF}{15I_o(2K)^5}+\frac{dD}{3I_o(2K)^3}+\frac{a(3d+ea^2)}{6I_o(2K)^2}C-\frac{a^3(5d+3ea^2)A}{3aI_o}$$

A, C, D y **F** fueron calculadas a propósito de las fuerzas verticales.

Del mismo modo, a partir de $m_1 q_{1h}=(a+x)q_{1h}$, se calcula

$$(VIII)_h=\frac{eG}{15I_o(2K)^6}+\frac{aeF}{15I_o(2K)^5}+\frac{dE}{3I_o(2K)^4}+\frac{a(5d+ea^2)}{6I_o(2K)^3}D+$$

$$+\frac{a^2(3d+ea^2)C}{6I_o(2K)^2}-\frac{a^3(5d+3ea^2)}{30I_o(2K)}B-\frac{a^4(5d+3ea^2)}{30I_o}A$$

En cuanto a (IX)$_h$:

$$(IX)_h=\frac{eH}{30I_o(2K)^6}+\frac{5d-a^2e}{30I_o(2K)^4}F+\frac{a(3d+a^2e)}{12I_o(2K)^3}E-\frac{a^2dD}{6I_o(2K)^2}-$$

$$-\frac{a^3}{15}\frac{5d+2a^2e}{I_o(2K)}C+\frac{a^5}{60}\frac{2K}{I_o}(5d+3ea^2)A$$

Aqui aparece $H=\int_{\varphi_o}^{0}\left(\frac{Sh^7\varphi}{Ch^4\varphi}\right)d\varphi$, que no ha sido calculada

con anterioridad, su valor es:

$$H=\left[\frac{Ch^3\varphi}{3}-3Ch\varphi-\frac{3}{Ch\varphi}+\frac{1}{3Ch^3\varphi}\right]_{\varphi_o}^{0}=$$

$$=-\frac{16}{3}-\frac{1}{3}Ch^3\varphi_o+3Ch\varphi_o+\frac{3}{Ch\varphi_o}-\frac{1}{3Ch^3\varphi_o}$$

Para calcular (VII)'$_h$, (VIII)'$_h$ y (IX)'$_h$ relativas al segundo semi-arco, se determina en primer lugar la posición y_1 (Fig. 10) del centro de gravedad de la suma de las cargas que obran en un arco completo. Si $\Sigma\omega_{1h}$ es la suma de las cargas horizontales relativas a un semi-arco, se tendrá:

$$\Sigma\omega_{1h} = \int_{-a}^{0} (d + ex^2)dx = \left[d \cdot x + \frac{ex^3}{3}\right]_{-a}^{0} = \frac{a}{3}(3d + ea^2).$$

$$\Sigma y\omega_{1h} = \int_{-a}^{0} Kx^2(d + ex^2)dx = K\left[\frac{d \cdot x^3}{3} + \frac{ex^5}{5}\right]_{-a}^{0} = \frac{af}{15}(5d + 3ea^2)$$

La distancia y del centro de gravedad a la clave es:

$$Y = \frac{\Sigma y\omega_{1h}}{\Sigma\omega_{1h}} = \frac{f}{5}\,\frac{5d + 3ea^2}{3d + ea^2}$$

La distancia y_1 del centro de gravedad a la cuerda es:

$$Y_1 = f - Y = \frac{2}{5} f\,\frac{5d + ea^2}{3d + ea^2}$$

El examen de la figura 10 da para q_{1h} y q_{2h}, relativos a 2 puntos simétricos:

$$q_{2h} = (2\Sigma\omega_{1h}) \times (Y_1 + n_1) - q_1$$

pasando a (VII)'$_h = \int_0^a q_{2h} \frac{ds}{I}$, se obtiene:

$$(VII)'_h = Y_1(2\Sigma\omega_{1h})(III) + (2\Sigma\omega_{1h})(II) - (VII)_h$$

También

$$m_2 q_{2h} = (2a - m_1)\left[2(\Sigma\omega_{1h}) \times (Y_1 + n_1) - q_{1h}\right]$$

de donde se obtiene:

$$(VIII)'_h = 2a(2\Sigma\omega_{1h})Y_1(III) + 2a(2\Sigma\omega_{1h})(II) - (2\Sigma\omega_{1h})(IV) - 2a(VII)_h + (VIII)_h =$$

$$= 2a(VII)'_h - (2\Sigma\omega_{1h})Y_1(I) - (2\Sigma\omega_{1h})(IV) + (VIII)_h$$

y:

$$n_2 q_{2h} = n_1\left[2(\Sigma\omega_{1h})(Y_1 + n_1) - q_{1h}\right]$$

Obteniéndose:

$$(IX)'_h = 2(\Sigma\omega_{1h})Y_1 \times (II) + 2(\Sigma\omega_{1h}) \times (VI) - (IX)_h$$

Con esto quedan determinadas las derivadas de la energía, relativas al arco ABC (figura 8); falta calcular las derivadas relativas a la pila y al arco CD.

Escribiendo las ecuaciones de equilibrio, se tiene (Fig. 8):

Suma de las fuerzas horizontales $= 0$, o sea:

$$H_1 + H^1 = -3\Sigma\omega_h - \Sigma\omega_{Ph} \quad \text{-------} (1)$$

donde $\Sigma\omega_{ph}$ es el peso de una pila.

Suma de los momentos con respecto a A nula, o sea:

$$M_1 + M^1 + 3aV_1 + aV^1 - hH^1 = -3(\Sigma\omega_h)Y_1 + (\Sigma\omega_{Ph})Y^1 \quad \text{----} (2)$$

donde y' es la distancia del centro de gravedad de la pila al punto G.

La tercera ecuación de equilibrio —relativa al equilibrio vertical— no da ninguna condición adicional ya que las reacciones del tipo V forman pares.

De las ecuaciones (1) y (2) se saca:

$$H^1 = -H_1 - 3\Sigma\omega_h - \Sigma\omega_{Ph} \quad \text{---} (3), \quad y:$$

$$V^1 = \frac{1}{a}\left[-3(\Sigma\omega_h)Y_1 + (\Sigma\omega_{Ph})Y^1 - M_1 - M^1 - 3aV_1 - h(H_1 + 3\Sigma\omega_h + \Sigma\omega_{Ph})\right] =$$

$$= \frac{1}{a}\left[-M_1 - M^1 - 3aV_1 - hH_1 - (h+Y_1)3\Sigma\omega_h - (h-Y^1)\Sigma\omega_{Ph}\right] \quad \text{----} (4)$$

Se ve que de las 6 cantidades M_1, V_1, H_1, M^1, V^1, H^1, solamente 4 son independientes ya que (3) y (4) muestran que H y V se pueden expresar en función de las demás. El sistema es hiperestático del cuarto orden.

Se escogen M_1, V_1, H_1 y M^1 como cantidades independientes. Se puede entonces proceder al cálculo de las derivadas de la energía relativas al arco CD.

Sean V_c, H_c, M_c, respectivamente, la reacción vertical, la reacción horizontal y el momento flexionante de reacción en el punto C del arco CD.

Del mismo modo que para el arco AB, el momento flexionante M_x en cualquier punto del arco CD será:

$$M_x = m_1 V_c + n_1 H_c + M_c + q_{1h}$$

y la energía:

$$U_{CD} = \frac{1}{2E}\int_{-a}^{0} \frac{M_x^2\, ds}{I}$$

Hay que calcular:

$$\frac{\delta U_{CD}}{\delta M_1}, \frac{\delta U_{CD}}{\delta V_1}, \frac{\delta U_{CD}}{\delta H_1}, \frac{\delta U_{CD}}{\delta M^1}$$

o sea:

$$\frac{\delta U_{CD}}{\delta V_1} = \frac{1}{E}\int_{-a}^{0} \frac{\delta M_x}{\delta V_1} M_x \frac{ds}{I}, \text{ etc.....}$$

Ahora:

$$\frac{\delta M_x}{\delta V_1} = \frac{\delta(m_1 V_c + n_1 H_c + M_c + q_{1h})}{\delta V_1} = m_1 \frac{\delta V_c}{\delta V_1} + n_1 \frac{\delta H_c}{\delta V_1} + \frac{\delta M_c}{\delta V_1}.$$

Pero:

$$V_c = V_1 + V^1 = \frac{1}{a}\left[-M_1 - M^1 - 2aV_1 - hH_1 - (h+y_1)3\Sigma\omega_h - (h-y^1)\Sigma\omega_{Ph}\right] \text{----}(5)$$

$$H_c = H_1 + H^1 + 2\Sigma\omega_h + \Sigma\omega_{Ph} = -\Sigma\omega_h \text{----}(6)$$

$$M_c = M_1 + 2aV_1 + 2(\Sigma\omega_h)y_1 + M^1 + h(H_1 + 3\Sigma\omega_h + \Sigma\omega_{Ph}) - (\Sigma\omega_{Ph})Y^1 =$$

$$= M_1 + 2aV_1 + hH_1 + M^1 + (2y_1 + 3h)\Sigma\omega_h + (h-y^1)\Sigma\omega_{Ph} \text{----}(7)$$

De donde: $\frac{\delta V_c}{\delta V_1} = -2 \quad \frac{\delta H_c}{\delta V_1} = 0 \quad \frac{\delta M_c}{\delta V_1} = 2a$ y $\frac{\delta M_x}{\delta V_1} = -2m_1 + 2a$

$$E\frac{\delta U_{CD}}{\delta V_1} = \int_{-a}^{0} 2a\left(1 - \frac{m_1}{a}\right)(m_1 V_c + n_1 H_c + M_c + q_{1h})\frac{ds}{I} =$$

$$= 2a\left[(\mathrm{I})V_c + (\mathrm{II})H_c + (\mathrm{III})M_c + (\mathrm{VII})_h - \frac{1}{a}\left((\mathrm{V})V_c + (\mathrm{IV})H_c + (\mathrm{I})M_c + (\mathrm{VIII})_h\right)\right] =$$

$$= 2a\left[\left((\mathrm{I}) - \frac{(\mathrm{V})}{a}\right)V_c + \left((\mathrm{II}) - \frac{(\mathrm{IV})}{a}\right)H_c + \left((\mathrm{III}) - \frac{(\mathrm{I})}{a}\right)M_c + (\mathrm{VII})_h - \frac{(\mathrm{VIII})_h}{a}\right] = 2a \times J$$

Donde **J** es la cantidad entre ganchos.

La substitución de V_c, H_c y M_c por sus valores sacados de (5), (6) y (7) da el valor $\delta U_{CD}/\delta V_1$ expresado como función lineal de las incógnitas M_1, V_1, H_1, M^1.

Con el mismo razonamiento se calculan las demás derivadas, encontrándose:

$$E\frac{\delta U_{CD}}{\delta H_1} = hJ \;;\quad E\frac{\delta U_{CD}}{\delta M_1} = J \;;\quad E\frac{\delta U_{CD}}{\delta M^1} = J$$

Falta obtener las derivadas de la energía de la pila:

La figura 11 muestra las notaciones usadas.

El momento flexionante en un punto de altura y es:

$$M_y = M^1 - H^1 y - \frac{Wy^2}{2} + \frac{W-\omega}{h}\, y \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{y}{3} =$$

$$= M^1 - H^1 y - \frac{Wy^2}{2} + \frac{W-\omega}{6h}\, y^3$$

donde **W** y ω son, respectivamente, las cargas aplicadas por unidad de altura en la base y en la parte superior.

La energía es:

$$U_P = \frac{1}{2E}\int_0^h \frac{M_y^2\, dy}{I_y}$$

Si **a** es el espesor en la base y **t** el espesor en la parte superior, el espesor **V** a la altura y será:

$$V = a + \frac{t-a}{h}\, y = a + Ky \quad , \text{con } K = \frac{t-a}{h}$$

é

$$I_y = \frac{bV^3}{12} = \frac{b}{12}\,(a+Ky)^3$$

En M_y intervienen 2 variables independientes, a saber: M^1 y H_1, ya que H^1 es función lineal de H_1, como se ha visto.

Hay que calcular:

$$\frac{\delta U_P}{\delta M^1} \quad y \quad \frac{\delta U_P}{\delta H_1}$$

$$E\,\frac{\delta U_P}{\delta M^1} = \frac{12}{b}\int_0^h \frac{M^1 - H^1 y - \frac{W}{2}y^2 + \frac{W-\omega}{h}y^3}{(a+Ky)^3}\,dy =$$

$$= \frac{12}{b}\left[A_1 M^1 - B_1 H^1 - \frac{W}{2}C_1 + \frac{W-\omega}{h}D_1\right]$$

$$\text{con } A_1 = \int_0^h \frac{dy}{(a+Ky)^3} = \frac{1}{K}\int_a^t \frac{dV}{V^3} = -\frac{1}{2K}\left[\frac{1}{V^2}\right]_a^t = -\frac{1}{2K}\left[\frac{1}{t^2} - \frac{1}{a^2}\right]$$

$$B_1 = \int_0^h \frac{y\,dy}{(a+Ky)^3} = \frac{1}{K^2}\int_a^t \frac{V-a}{V^3}\,dV = \frac{1}{K^2}\left[-\frac{1}{V} + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{V^2}\right)\right]_a^t = -\frac{1}{K^2}\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right] - \frac{a}{K}A_1$$

$$C_1 = \int_0^h \frac{y^2\,dy}{(a+Ky)^3} = \frac{1}{K^3}\int_a^t \frac{(V-a)^2}{V^3}\,dV = \frac{1}{K^3}\left[\int_a^t \frac{dV}{V} - 2a\int_a^t \frac{dV}{V^2} + a^2\int_a^t \frac{dV}{V^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{K^3}\left[\log_e \frac{t}{a} + 2a\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right)\right] + \frac{a^2}{K^2}A_1$$

$$D_1 = \int_0^h \frac{y^3\,dy}{(a+Ky)^3} = \frac{1}{K^4}\int_a^t \frac{(V-a)^3}{V^3}\,dV = \frac{1}{K^4}\left[\int_a^t dV - 3a\int_a^t \frac{dV}{V} + 3a^2\int_a^t \frac{dV}{V^2} - a^3\int_a^t \frac{dV}{V^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{K^4}\left[(t-a) - 3a\log_e \frac{t}{a} - 3a^2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right)\right] - \frac{a^3}{K^3}A_1$$

$$E\,\frac{\delta U_P}{\delta H_1} = E\,\frac{\delta U_P}{\delta H^1}\,\frac{\delta H^1}{\delta H_1} = E\,\frac{\delta U_P}{\delta H^1}(-1) = \frac{12}{b}\int_0^h \frac{\left(M^1 - H^1 y - \frac{W}{2}y^2 + \frac{W-\omega}{h}y^3\right)y\,dy}{(a+Ky)^3}$$

$$E\,\frac{\delta U_P}{\delta H_1} = \frac{12}{b}\left[B_1 M^1 - C_1 H^1 - \frac{W}{2}D_1 + \frac{W-\omega}{h}E_1\right]$$

donde:

$$E_1 = \int_0^h \frac{y^4\,dy}{(a+Ky)^3} = \frac{1}{K^5}\int_0^t \frac{(V-a)^4}{V^3}\,dV =$$

$$= \frac{1}{K^5}\left[\int_a^t V\,dV - 4a\int_a^t dV + 6a^2\int_a^t \frac{dV}{V} - 4a^3\int_a^t \frac{dV}{V^2} + a^4\int_a^t \frac{dV}{V^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{K^5}\left[\frac{t^2-a^2}{2} - 4a(t-a) + 6a^2\log_e \frac{t}{a} + 4a^3\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right)\right] + \frac{a^4}{K^4}A_1$$

Una vez calculadas las derivadas de la energía hasta el punto **D**, clave del arco central, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\delta U_{AB}}{\delta V_1} + \frac{\delta U_{BC}}{\delta V_1} + \frac{\delta U_{CD}}{\delta V_1} = 0 = f_1(V_1, H_1, M_1, M^1)$$

$$\frac{\delta U_{AB}}{\delta H_1} + \frac{\delta U_{BC}}{\delta H_1} + \frac{\delta U_{CD}}{\delta H_1} + \frac{\delta U_P}{\delta H_1} = 0 = f_2(V_1, H_1, M_1, M^1)$$

$$\frac{\delta U_{AB}}{\delta M_1} + \frac{\delta U_{BC}}{\delta M_1} + \frac{\delta U_{CD}}{\delta M_1} = 0 = f_3(V_1, H_1, M_1, M^1)$$

$$\frac{\delta U_P}{\delta M^1} + \frac{\delta U_{CD}}{\delta M^1} = 0 = f_1(V_1, H_1, M_1, M^1)$$

Es un sistema lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, cuya solución da el valor de M_1, V_1, H_1 y M^1.

II. Cargas horizontales concentradas en las claves. (Efecto de la inercia de la tubería y sus soportes.)

Se llama **P** a la carga concentrada en la clave.

Las integrales $(VII)_h$, $(VIII)_h$, $(IX)_h$, relativas a la carga exterior para el arco **AB**, son nulas.

El cálculo de $(VII)^1_h$, $(VIII)^1_h$, $(IX)^1_h$, relativas al arco **BC**, se hace como sigue:

$$\text{Se tiene: } q_{2h} = P\,y = K P X^2$$

$$(VII)^1_h = \int_0^a q_{2h} \frac{ds}{I} = KP \int_0^a \frac{x^2\,ds}{I} = \frac{P}{2I_0} \int_0^{-\varphi_0} \frac{Sh^2\varphi\, d\varphi}{(2K)^2\, Ch^4\varphi} = \frac{P}{2I_0 (2K)^2}\, C$$

$$(VIII)^1_h = \int_0^a m q_{2h} \frac{ds}{I} = \int_0^a (x+a)\, q_{2h} \frac{ds}{I} = \int_0^{-\varphi_0} \frac{P}{2I_0} \frac{Sh^3\varphi\, d\varphi}{(2K)^3\, Ch^4\varphi} + a \int_0^{-\varphi_0} \frac{P}{2I_0} \frac{Sh^2\varphi}{(2K)^2\, Ch^4\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{P}{2I_0} \frac{1}{(2K)^2} \left[-\frac{1}{2K} D + a\, C \right]$$

$$(IX)^1_h = \int_0^a (y-f)\, q_{2h} \frac{ds}{I} = 2K \int_0^a \frac{x^2 - a^2}{2}\, q_{2h} \frac{ds}{I} =$$

$$= \frac{P}{4I_0} \frac{1}{(2K)^3} \int_0^{-\varphi_0} \frac{Sh^4\varphi}{Ch^4\varphi}\, d\varphi - \frac{a^2 P}{4I_0} \frac{1}{2K} \int_0^{-\varphi_0} \frac{Sh^2\varphi}{Ch^4\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{P}{4I_0 (2K)} \left[\frac{1}{(2K)^2} E - a^2\, C \right]$$

Las integrales **C**, **D**, **E** que entran aquí, han sido calculadas en lo anterior.

Los términos que intervienen en las derivadas de la energía relativas a los arcos **AB** y **BC** son todos conocidos.

Falta calcular los relativos al arco **CD** y a la pila.

Para el arco **CD** se tomarán en cuenta, como en el caso anterior, las ecuaciones de equilibrio (figura 12).

Equilibrio de fuerzas horizontales:

$$H_1 + H^1 = -\frac{3}{2}P$$

Equilibrio de momentos con respecto a A:

$$2M_1 + 2M^1 + 6aV_1 + 2aV^1 - 2hH^1 + 3fP = 0$$

Se obtienen 2 ecuaciones que nos permiten reducir las incógnitas a 4, a saber **M_1**, **M^1**, **V_1**, **H_1**, ya que:

$$H^1 = -\frac{3}{2}P - H \qquad \text{y}$$

$$V^1 = \frac{1}{a}\left[-M_1 - M^1 - 3aV_1 - hH_1 - \frac{3}{2}P(h+f)\right]$$

El momento **M_x** en cualquier punto del arco **CD** será:

$$M_x = m_1 V_c + n_1 H_c + M_c$$

y la energía:

$$U_{CD} = \frac{1}{2E}\int_{-a}^{0} \frac{M_x^2\, ds}{I}$$

Hay que calcular:

$$\frac{\delta U_{CD}}{\delta M_1}, \quad \frac{\delta U_{CD}}{\delta V_1}, \quad \frac{\delta U_{CD}}{\delta H_1}, \quad \frac{\delta U_{CD}}{\delta H^1}$$

o sea:

$$\frac{\delta U_{CD}}{\delta V_1} = \frac{1}{E}\int_{-a}^{0} \frac{\delta M_x}{\delta V_1} M_x \frac{ds}{I}, \text{ etc....,}$$

Ahora:

$$\frac{\delta M_x}{\delta V_1} = m_1 \frac{\delta V_c}{\delta V_1} + n_1 \frac{\delta H_c}{\delta V_1} + \frac{\delta M_c}{\delta V_1}$$

con:

$$V_c = V_1 + V^1 = \frac{1}{a}\left[-M_1 - M^1 - 2aV_1 - hH_1 - \frac{3}{2}P'(h+f)\right]$$

$$H_c = H_1 + H^1 + P = -\frac{P}{2}$$

$$M_c = M_1 + 2aV_1 + M^1 + Pf + h\left(H_1 + \frac{3P}{2}\right) =$$

$$= M_1 + M^1 + 2aV_1 + hH_1 + P\left(f + \frac{3}{2}h\right)$$

Como los coeficientes de M_1, M^1, V_1, H_1, en las expresiones de V_c, H_c, M_c, son exactamente los mismos que para las fuerzas ω_h, se obtendrán también expresiones análogas para las derivadas:

$$E\frac{\delta U_{CD}}{\delta V_1} = \int_{-a}^{0} 2a\left(1 - \frac{m_1}{a}\right)(m_1 V_c + n_1 H_c + M_c)\frac{ds}{I}$$

$$= 2a\left[\left(\text{I} - \frac{\text{V}}{a}\right)V_c + \left(\text{II} - \frac{\text{IV}}{a}\right)H_c + \left(\text{III} - \frac{\text{I}}{a}\right)M_c\right] = 2a\, J_p$$

donde J_p es la cantidad entre ganchos.

Con el mismo razonamiento se calculan las demás derivadas:

$$E\frac{\delta U_{CD}}{\delta H_1} = h J_p \quad . \quad E\frac{\delta U_{CD}}{\delta M_1} = \frac{\delta U_{CD}}{\delta M^1} = J_p$$

Substituyendo en J_p los valores de M_c, V_c y H_c expresados en función de las incógnitas, se encuentran las derivadas como funciones lineales de M_1, V_1, H_1, M^1.

Las ecuaciones relativas a la energía de la pila se reducen en este caso a:

$$E\frac{\delta U_P}{\delta M^1}=\frac{12}{b}(A_1M^1-B_1H^1)$$

$$E\frac{\delta U_P}{\delta H_1}=\frac{12}{b}(B_1M^1-C_1H^1)$$

En las que A_1 B_1 C_1 son las mismas cantidades que fueron calculadas en el párrafo anterior.

Para expresar las derivadas relativas a la pila en función de las incógnitas basta substituir H^1 por $(-H_1-\frac{3}{2}P)$ en las 2 ecuaciones anteriores.

La determinación de las incógnitas se hace entonces como en el caso de las fuerzas ω_h

Nota: El método para el cálculo del efecto de un temblor en una dirección perpendicular al plano de los arcos tiene varios aspectos diferentes de los que se acaban de presentar por lo que se describe después de la aplicación numérica de los 3 casos descritos.

D).—APLICACION NUMERICA

La aplicación numérica está hecha en las tablas que siguen:

APENDICE

DEMOSTRACION DE QUE NO EXISTEN COCEOS EN LAS PILAS SI EL SISTEMA DE CARGAS APLICADAS A LOS ARCOS ES VERTICAL Y SIMETRICO CON RESPECTO A LAS CLAVES

En el cálculo de las derivadas de la energía intervienen las integrales (I), (II), ...(IX), y (I)', (II)', ...(IX)'. Para simplificar la escritura se llamará ahora: (I) = A, (II) = B, (III) = C, (IV) = D, (V) = E, (VI) = F, (VII) = G, (VIII) = J y (IX) = K. A las integrales (I)', (II)', ...(IX)' se les llamará: A', B', ...J', K'.

Las ecuaciones de la energía relativas al 1er. semi-arco se escriben entonces:

$$E_e\frac{\delta U_{AB}}{\delta V_1}=E\,V_1+DH_1+AM_1+J \text{ -----(1)}$$

$$E_e\frac{\delta U_{AB}}{\delta H_1}=D\,V_1+FH_1+BM_1+K \text{ ------(2)}$$

$$E_e\frac{\delta U_{AB}}{\delta M_1}=AV_1+BH_1+CM_1+G \text{ ------(3)}$$

Las ecuaciones relativas al arco **BC** son análogas pero con las letras acentuadas.

Ahora, se demostró que:

$$A^1 = 2a\,C - A.$$

$$B^1 = B.$$

$$C^1 = C$$

$$D^1 = 2a\,B - D$$

$$E^1 = 4a^2\,C - 4a\,A + E$$

$$F^1 = F$$

$$G^1 = -2\sum \omega_v \left[a\,C - A\right] + G$$

$$J^1 = -2\sum \omega_v \left[2a^2\,C - 3a\,A + E\right] + 2a\,G - J$$

$$K^1 = -2\sum \omega_v \left[a\,B - D\right] + K$$

Llamando 2 $\Sigma\omega_v = P =$ carga vertical de un arco completo (carga total), las ecuaciones relativas al segundo semi-arco, se escriben:

$$E_e \frac{\delta U_{BC}}{\delta V_1} = (4a^2\,C - 4a\,A + E)\,V_1 + (2a\,B - D)\,H_1 + (2a\,C - A)\,M_1 -$$

$$-P\left[2a^2\,C - 3a\,A + E\right] + 2aG - J \text{ - - - - - } (4)$$

$$E_e \frac{\delta U_{BC}}{\delta H_1} = (2a\,B - D)\,V_1 + F\,H_1 + B\,M_1 - P\left[aB - D\right] + K \text{ - - - - - - - } (5)$$

$$E_e \frac{\delta U_{BC}}{\delta M_1} = (2a\,C - A)\,V_1 + B\,H_1 + C\,M_1 - P\,(a\,C - A) + G \text{ - - - - - - } (6)$$

Las ecuaciones relativas a la pila son de la forma:

$$E_e \frac{\delta U_P}{\delta M^1} = rM^1 + sH^1 \text{-------} (7)$$

$$E_e \frac{\delta U_P}{\delta H^1} = sM^1 + tH^1 \text{-------} (8)$$

ya que el momento flexionante en cualquier punto de la pila es función lineal de **M′** y **H′**. Los valores de las constantes **r**, **s** y **t** dependen de las dimensiones de la pila.

Para el tercer semi-arco se tiene:

$$M_x = m_1 V_c + n_1 H_c + M_c + q_1$$

$$\text{con: } V_c = V_1 - P + V^1 - Q$$

Q es el peso de una pila.

Por otra parte, la ecuación de equilibrio de las fuerzas verticales da:

$$2V_1 + 2V^1 = 3P + 2Q$$

Sustituyendo en la expresión de $\mathbf{V_c}$, se obtiene:

$$V_c = \frac{P}{2}$$

Los valores de $\mathbf{H_c}$ y $\mathbf{M_c}$ son, respectivamente:

$$H_c = H_1 + H^1$$

$$M_c = M_1 + M^1 + 2a V_1 - hH^1 - aP$$

El cálculo de las derivadas de la energía relativa al arco **CD** se hace como sigue:

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta V_1} = \int_{-a}^{0} M_x \frac{\delta M_x}{\delta V_1} \frac{ds}{I}$$

$$\frac{\delta M_x}{\delta V_1} = \frac{\delta M_x}{\delta V_c} \frac{\delta V_c}{\delta V_1} + \frac{\delta M_x}{\delta H_c} \frac{\delta H_c}{\delta V_1} + \frac{\delta M_x}{\delta M_c} \frac{\delta M_c}{\delta V_1} =$$

$$= m_1 \times 0 + n_1 \times 0 + 1 \times 2a$$

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta V_1} = 2a \int_{-a}^{0} M_x \frac{ds}{I} = 2a \left[A\, V_c + B\, H_c + C\, M_c + G \right]$$

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta H_1} = \int_{-a}^{0} M_x \frac{\delta M_x}{\delta H_1} \frac{ds}{I}$$

$$\frac{\delta M_x}{\delta M_1} = \frac{\delta M_x}{\delta V_c} \frac{\delta V_c}{\delta H_1} + \frac{\delta M_x}{\delta H_c} \frac{\delta H_c}{\delta H_1} + \frac{\delta M_x}{\delta M_c} \frac{\delta M_c}{\delta H_1} =$$

$$= m_1 \times 0 + n_1 \times 1 + 1 \times 0 = n_1$$

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta H_1} = \int_{-a}^{0} n_1 M_x \frac{ds}{I} = D\, V_c + F\, H_1 + B\, M_c + K$$

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta M_1} = \int_{-a}^{0} M_x \frac{\delta M_x}{\delta M_1} \frac{ds}{I}$$

$$\frac{\delta M_x}{\delta M_1} = \frac{\delta M_x}{\delta V_c} \frac{\delta V_c}{\delta M_1} + \frac{\delta M_x}{\delta H_c} \frac{\delta H_c}{\delta M_1} + \frac{\delta M_x}{\delta M_c} \frac{\delta M_c}{\delta M_1} =$$

$$= m_1 \times 0 + n_1 \times 0 + 1 \times 1$$

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta M_1} = \int_{-a}^{0} M_x \frac{ds}{I} = A\, V_c + B\, H_c + C\, M_c + G$$

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta H^1} = \int_{-a}^{0} M_x \frac{\delta M_x}{\delta H^1} \frac{ds}{I}$$

$$\frac{\delta M_x}{\delta H^1} = m_1 \frac{\delta V_c}{\delta H^1} + n_1 \frac{\delta H_c}{\delta H^1} + \frac{\delta M_c}{\delta H^1} = m_1 \times 0 + n_1 \times 1 - h$$

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta H^1} = \int_{-a}^{0} (n_1 - h)\, M_x \frac{ds}{I} = (D - hA)\, V_c + (F - hB)\, H_c +$$

$$+ (B - hC)\, M_c + K - hG$$

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta M^1} = \int_{-a}^{0} M_x \frac{\delta M_x}{\delta M^1} \frac{ds}{I}$$

$$\frac{\delta M_x}{\delta M^1} = m_1 \frac{\delta V_c}{\delta M^1} + n_1 \frac{\delta H_c}{\delta M^1} + \frac{\delta M_c}{\delta M^1} = m_1 \times 0 + n_1 \times 0 + 1$$

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta M^1} = \int_{-a}^{0} M_x \frac{ds}{I} = A V_c + B H_c + C M_c + G$$

En las expresiones anteriores intervienen: $AV_c + BH_c + CM_c + G$ y $DV_c + FH_c + BM_c + K$, que se van a calcular substituyendo V_c, H_c y M_c por su valor en función de las incógnitas M_1, V_1, H_1, M^1 y H^1.

$$A V_c + B H_c + C M_c + G = A \frac{P}{2} + B(H_1 + H^1) + C(M_1 + M^1 +$$

$$+ 2a V_1 - h H^1 - a P) + G. =$$

$$= 2a C V_1 + B H_1 + C M_1 + (B - hC) H^1 + C M^1 +$$

$$+ \frac{P}{2} (A - 2a C) + G.$$

$$D V_c + F H_c + B M_c + K = D \frac{P}{2} + F(H_1 + H^1) + B(M_1 + M^1 +$$

$$+ 2a V_1 - h H^1 - a P) + K =$$

$$= 2a B V_1 + F H_1 + B M_1 + (F - hB) H^1 + B M^1 +$$

$$\frac{P}{2} (D - 2a B) + K$$

De donde:

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta V_1} = 4a^2 C V_1 + 2a B H_1 + 2a C M_1 + 2a (B - hC) H^1 +$$

$$+ 2a C M^1 + \frac{P}{2} (2a A - 4a^2 C) + 2a G \text{ -----(9)}$$

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta H_1} = 2a B V_1 + F H_1 + B M_1 + (F - h B) H^1 + B M^1 +$$

$$+\frac{P}{2}(D-2_a B)+K \text{ -----(10)}$$

$$E_e\frac{\delta U_{CD}}{\delta M_1}=2_a CV_1+BH_1+CM_1+(B-hC)H^1+CM^1+$$

$$+\frac{P}{2}(A-2_a C)+G \text{ ------ (11)}$$

$$E_e\frac{\delta U_{CD}}{\delta H^1}=2_a(B-hC)V_1+(F-hB)H_1+(B-hC)M_1+$$

$$+(F-2hB+h^2C)H^1+(B-HC)M^1+$$

$$+\frac{P}{2}(D-2_aB-Ah+2_ah\,C)+K-hG \text{ ----(12)}$$

$$E_e\frac{\delta U_{CD}}{\delta M^1}=2_a CV_1+BH_1+CM_1+(B-hC)H^1+CM^1+$$

$$+\frac{P}{2}(A-2_a C)+G \text{ ----(13)}$$

Finalmente, las cinco ecuaciones por resolver son:

$$\sum_A^D\frac{\delta U}{\delta V_1}=\sum_A^D\frac{\delta U}{\delta H_1}=\sum_A^D\frac{\delta U}{\delta M_1}=\sum_A^D\frac{\delta U}{\delta H^1}=\sum_A^D\frac{\delta U}{\delta M^1}=0$$

A las derivadas que intervienen en el arco AB, o sea:

$$EV_1+DH_1+AM_1+J\ ,\quad DV_1+FH_1+BM_1+K\ ,$$

$$AB_1+BH_1+CM_1+G\ ,$$

las llamamos respectivamente u_1, u_2, u_3.

En la ecuación (4) se toma en cuenta que:

$$-DH_1-AM_1-J=EV_1-u_1 \quad \text{y que:}$$

$$2a(BH_1+CM_1+G)=2a(u_3-AV_1)$$

La ecuación (4), hechas estas transformaciones, se escribe:

$$2(2a^2 C - 3a A + E) V_1 - u_1 + 2a u_3 - P(2a^2 C - 3a A + E) = E_e \frac{\partial U_{BC}}{\partial V_1}$$

$$= (2a^2 C - 3a A + E)(2V_1 - P) - u_1 + 2a u_3 \text{ ----- } (4)^1$$

La ecuación (5), teniendo en cuenta que:

$$FH_1 + BM_1 + K = u_2 - DV_1$$

se escribe:

$$E_e \frac{\partial U_{BC}}{\partial H_1} = (aB - D)(2V_1 - P) - u_2 \text{ ---- } (5)^1$$

La ecuación (6), teniendo en cuenta que:

$$BH_1 + CM_1 + G = u_3 - AV_1 ,$$

se escribe:

$$E_e \frac{\partial U_{BC}}{\partial M_1} = (aC - A)(2V_1 - P) + u_3 \text{ ---- } (6)^1$$

La ecuación (9), teniendo en cuenta que:

$$BH_1 + CM_1 + G = u_3 - AV_1 ,$$

se escribe:

$$E_e \frac{\partial U_{CD}}{\partial V_1} = 4a^2 CV_1 + 2a u_3 - 2a AV_1 + 2a(B - hC)H^1 + 2a CM^1 +$$

$$+ P(aA - 2a^2 C) = (2a^2 C - aA)(2V_1 - P) + 2a u_3 +$$

$$+ 2a(B - hC)H^1 + 2a CM^1 \text{ ---- } (9)^1$$

Del mismo modo, con: $FH_1 + BM_1 + K = U_2 - DV$ se transforma (10) en:

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta H_1} = \left(a B - \frac{D}{2}\right)(2V_1 - P) + u_2 + (F - Bh)H^1 + BM^1 \text{ ----} (10)^1$$

Con la (12), tomando en cuenta que: $FH_1 + BM_1 + K = U_2 - DW_1$, y que: $BH_1 - CM_1 - G = AV_1 - U_3$, se obtiene:

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta H^1} = \left(a B - \frac{D}{2} + h\frac{A}{2} - h a C\right)(2V_1 - P) + u_2 - h u_3 - +$$

$$+ (F - 2h B + h^2 C)H^1 + (B - hC)M^1 \text{ ----} (12)^1$$

Ahora la ecuación (11) con $BH_1 + CM_1 + G = U_3 - AV$, se escribe:

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta M_1} = \left(a C - \frac{A}{2}\right)(2V_1 - P) + u_3 + (B - hC)H^1 + CM^1 \text{ ----} (11)^1$$

Y la ecuación (13) se escribe:

$$E_e \frac{\delta U_{CD}}{\delta M^1} = \left(a C - \frac{A}{2}\right)(2V_1 - P) + u_3 + (B - hC)H^1 + CM^1 \text{ -----} (13)^1$$

Entonces las ecuaciones del sistema serán:

$$\sum \frac{\delta U}{\delta V_1} = 0 = (1) + (4)^1 + (9)^1$$

$$\sum \frac{\delta U}{\delta H_1} = 0 = (2) + (5)^1 + (10)^1$$

$$\sum \frac{\delta U}{\delta M_1} = 0 = (3) + (6)^1 + (11)^1$$

$$\sum \frac{\delta U}{\delta H^1} = 0 = (8) + (12)^1$$

$$\sum \frac{\delta U}{\delta M^1} = 0 = (7) + (13)^1$$

Substituyendo las expresiones así obtenidas, en las ecuaciones, y llamando **Q = 2V$_1$ — P,** se obtiene:

$$(4a^2 C - 4a A + E)Q + 4a\, u_3 + 2a(B - hC)H^1 + 2a\, CM^1 = \sum \frac{\delta U}{\delta V_1} = 0$$

$$3u_2 + \left(2aB - 3\frac{D}{2}\right)Q + (F - HB)H^1 + BM^1 = \sum \frac{\delta U}{\delta H_1} = 0$$

$$3u_3 + \left(2aC - 3\frac{A}{2}\right)Q + (B - hC)H^1 + CM^1 = \sum \frac{\delta U}{\delta M_1} = 0$$

$$\left(aB - \frac{D}{2} + h\frac{A}{2} - ha\, C\right)Q + u_2 - h u_3 + (F - 2hB + h^2 C + t)H^1 +$$

$$+ (B - hC + s)M^1 = \sum \frac{\delta U}{\delta H^1} = 0$$

$$\left(aC - \frac{A}{2}\right)Q + u_3 + (B - hC + s)H^1 + (C + r)M^1 = \sum \frac{\delta U}{\delta M^1} = 0$$

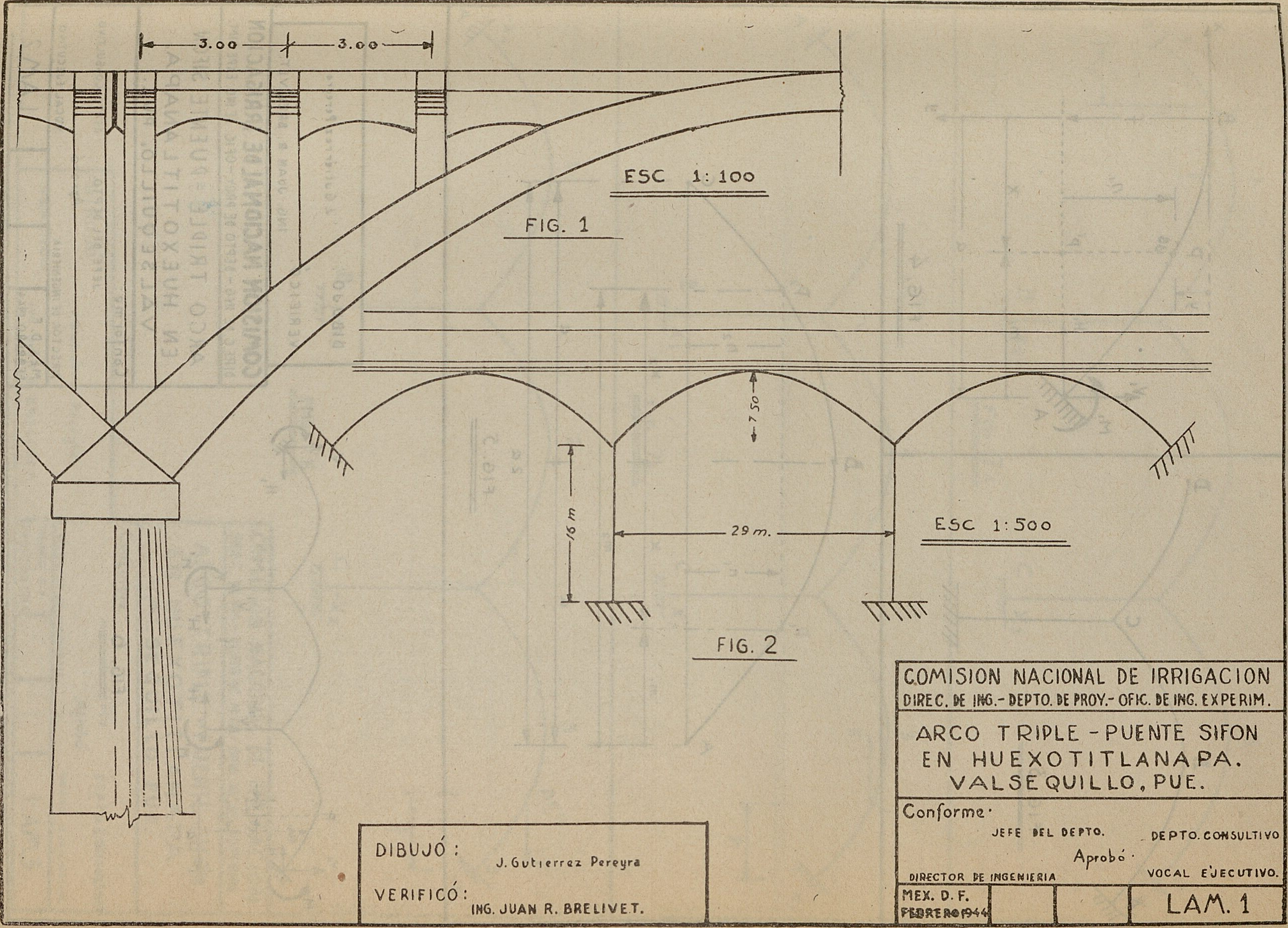
Como se ve, se obtiene un sistema lineal y homogéneo en **Q**, **u$_2$**, **u$_3$**, **M′** y **H′**. Como la solución tiene que ser única por la índole del problema físico, el determinante no puede ser nulo, y la única solución del sistema es:

$$Q = u_2 = u_3 = M^1 = H^1 = 0$$

De donde se deduce que:

$$Q = 2V_1 - P = 0, \text{ ó sea } V_1 = \frac{P}{2} \text{ y } M^1 = H^1 = 0$$

Lo que demuestra que en caso de arcos simétricos cargados simétricamente en un sentido **vertical,** los apoyos elásticos constituídos por las pilas **no** introducen ningún momento suplementario, ni coceo, pudiéndose estudiar cada arco separadamente, como si tuviera sus dos extremidades perfectamente empotradas.


3.00
3.00
ESC 1:100
FIG. 1
7.50
16 m
29 m.
ESC 1:500
FIG. 2
COMISION NACIONAL DE IRRIGACION
DIREC. DE ING.- DEPTO. DE PROY.- OFIC. DE ING. EXPERIM.
ARCO TRIPLE - PUENTE SIFON
EN HUEXOTITLANAPA.
VALSEQUILLO, PUE.
Conforme:
JEFE DEL DEPTO.
DEPTO. CONSULTIVO
Aprobó:
DIRECTOR DE INGENIERIA
VOCAL EJECUTIVO.
MEX. D. F.
FEBRERO 1944
LAM. 1
DIBUJÓ: J. Gutierrez Pereyra
VERIFICÓ: ING. JUAN R. BRELIVET.

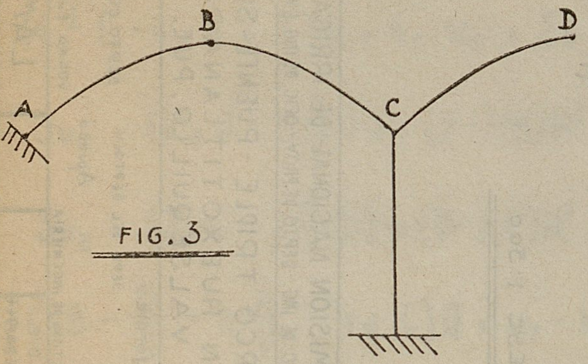


FIG. 3

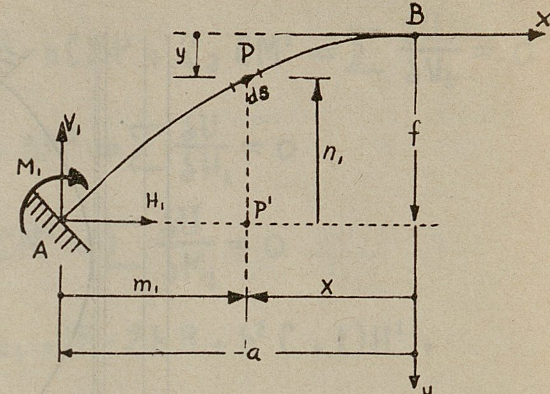


FIG. 4

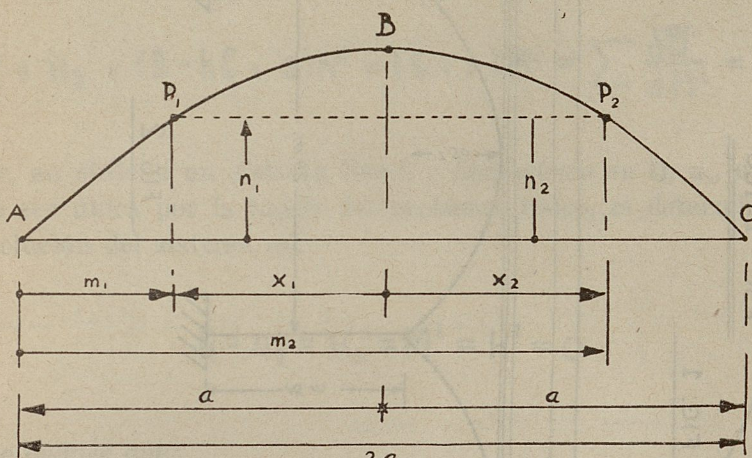


FIG. 5

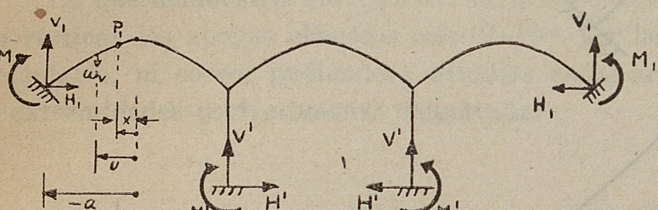


FIG. 6

DIBUJÓ: J. Gutiérrez Pereyra

VERIFICÓ: ING. JUAN R. BRELIVET.

COMISION NACIONAL DE IRRIGACION

DIREC. DE ING.- DEPTO DE PROY.- OFIC. DE ING. EXPERIM.

ARCO TRIPLE - PUENTE SIFON EN HUEXOTITLANAPA. VALSEQUILLO, PUE.

Conforme:

JEFE DEL DEPTO. DEPTO. CONSULTIVO.

Aprobó:

DIRECTOR DE INGENIERIA VOCAL EJECUTIVO

MEX. D. F. FEBRERO 1944

LAM. 2

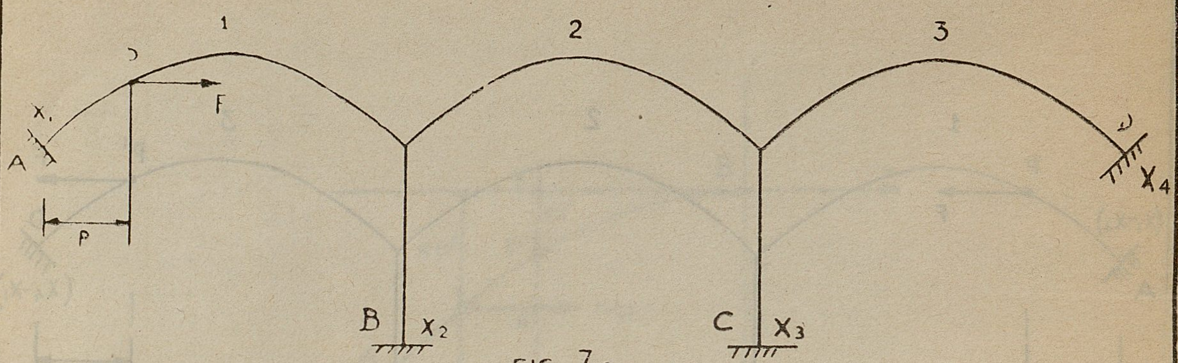


FIG 7a

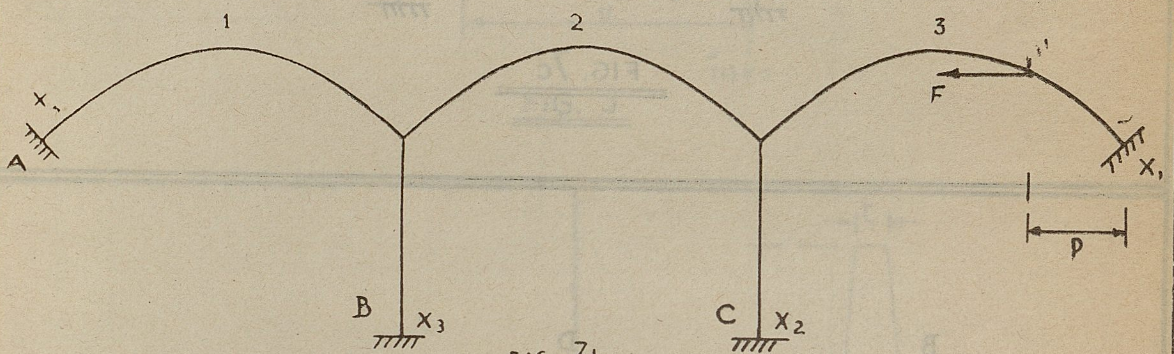


FIG. 7b

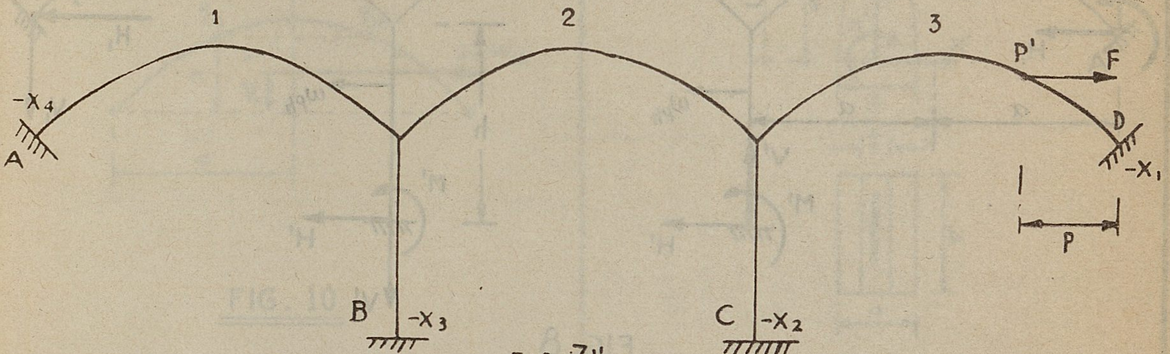


FIG. 7b'

COMISION NACIONAL DE IRRIGACION

DIREC. DE ING.- DEPTO. DE PROY.- OFIC. DE ING. EXPERIM.

ARCO TRIPLE - PUENTE SIFON
EN HUEXOTITLANAPA
VALSEQUILLO PUE.

Conforme :

JEFE DEL DEPTO — DEPTO. CONSULTIVO

Aprobó :

DIRECTOR DE INGENIERIA — VOCAL EJECUTIVO

DIBUJÓ: J. Gutierrez Pereyra

VERIFICÓ: ING. JUAN R. BRELIVET.

MEXICO D.F.
FEBRERO 1944

LAM.3

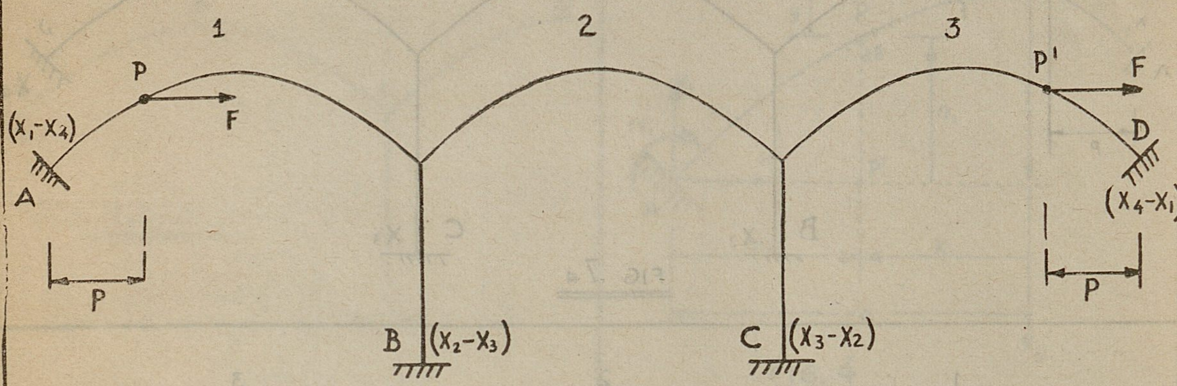


FIG. 7c

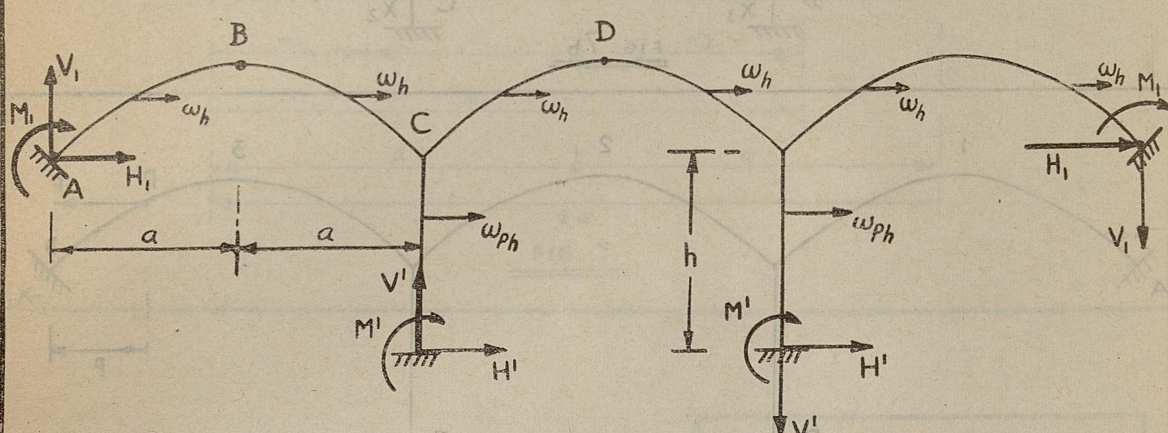


FIG. 8

COMISION NACIONAL DE IRRIGACION
DIREC. DE ING.- DEPTO. DE PROY.- OFIC. DE ING. EXPERIM.

ARCO TRIPLE - PUENTE SIFON
EN HUEXOTITLANAPA.
VALSEQUILLO. PUE.

Conforme:

JEFE DEL DEPTO — DEPTO. CONSULTIVO

Aprobó

DIRECTOR DE INGENIERIA — VOCAL EJECUTIVO.

DIBUJÓ: J. Gutiérrez Pereyra

VERIFICÓ: ING. JUAN R. BRELIVET.

MEX. D. F.
FEBRERO 1944

LAM 4

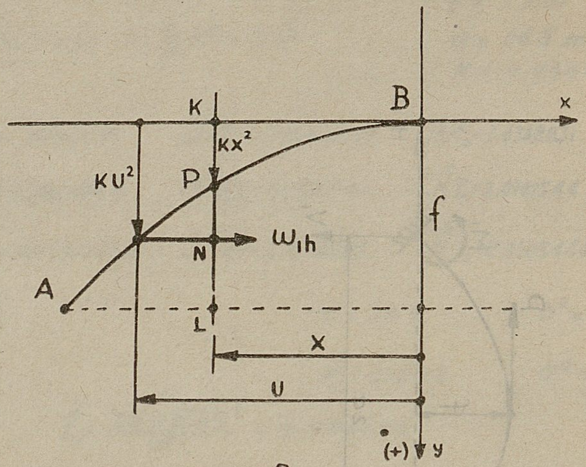


FIG. 9

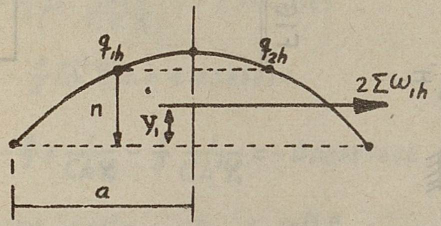


FIG. 10

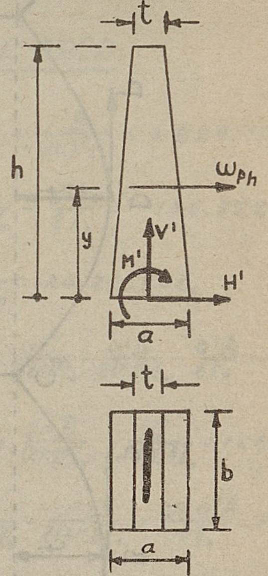


FIG. 11

COMISION NACIONAL DE IRRIGACION
DIREC. DE ING.- DEPTO. DE PROY.- OFIC. DE ING. EXPERIM.

ARCO TRIPLE - PUENTE SIFON
EN HUEXOTITLANAPA.
VALSEQUILLO. PUE.

Conforme:
JEFE DEL DEPTO. DEPTO. CONSULTIVO.
Aprobó:
DIRECTOR DE INGENIERIA VOCAL EJECUTIVO.

DIBUJÓ: J. Gutierrez Pereyra
VERIFICÓ: ING. JUAN R. BRELIVET.

MEXICO D.F.
FEBRERO 1944

LAM. 5

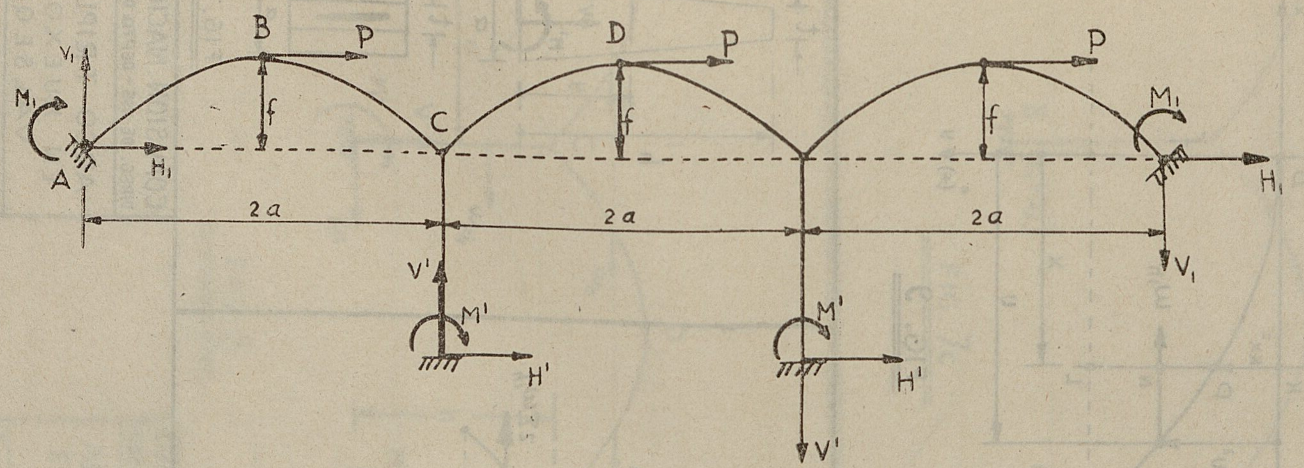


FIG. 12

COMISION NACIONAL DE IRRIGACION DIREC. DE ING.- DEPTO. DE PROY.- OFIC. DE ING. EXPERIM.	
ARCO TRIPLE - PUENTE SIFON EN HUEXOTITLANAPA. VALSEQUILLO. PUE.	
Conforme: JEFE DEL DEPTO. DEPTO. CONSULTIVO Aprobó: DIRECTOR DE INGENIERIA VOCAL EJECUTIVO.	
DIBUJÓ: J. Gutierrez Pereyra.	VERIFICO: ING. JUAN R. BRELIVET.
MEXICO D.F. FEBRERO 1944	LAM. 6

~ DATOS ~

Ecuación de la línea media: $y = \frac{f}{a^2} x^2 = K x^2$

$$\left\{\begin{aligned} f &= 7.5\ m. \\ a &= 14.5\ m. \\ K &= 0.035671819 \end{aligned}\right.$$

$$\frac{1}{2K} = 14.016667 \qquad \frac{1}{(2K)^5} = 541033.01 \qquad Sh\varphi_0 = -1.0344828 \qquad Ch\varphi_0 = 1.4388031 \qquad th\varphi_0 = -0.71898845$$

$$\frac{1}{(2K)^2} = 196.46695 \qquad \frac{1}{(2K)^6} = 7583497.4 \qquad Sh^2\varphi_0 = +1.0701547 \qquad Ch^2\varphi_0 = 2.0701544 \qquad th^2\varphi_0 = +0.51694439$$

$$\frac{1}{(2K)^3} = 2753.8118 \qquad \frac{1}{(2K)^7} = 106295103.2 \qquad Sh^3\varphi_0 = -1.1070566 \qquad Ch^3\varphi_0 = 2.9785446 \qquad th^3\varphi_0 = -0.37167703$$

$$\frac{1}{(2K)^4} = 38599.262 \qquad a = 14.5 \qquad a^3 = 3048.625$$

$$a^2 = 210.25 \qquad a^4 = 44205.0625$$

$$Sh\varphi_0 = -2Ka = -2\frac{f}{a}$$

$$Ch\varphi_0 = \sqrt{1 + 4\frac{f^2}{a^2}} \qquad I_0 = \frac{7.5 \times \overline{0.82}^3}{12} = 0.344605$$

CALCULO DE LAS CONSTANTES DEL ARCO.

$$A = th\varphi_0 \left[-1 + \frac{1}{3} th^2\varphi_0\right] = +0.59509610$$

$$B = -\frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{Ch^3\varphi_0}\right] = -0.22142185$$

$$C = -\frac{1}{3} th^3\varphi_0 = +0.12389234$$

$$D = -\frac{2}{3} + \frac{1}{Ch\varphi_0} - \frac{1}{3}\frac{1}{Ch^3\varphi_0} = -0.08355602$$

$$E = th\varphi_0 + \frac{1}{3} th^3\varphi_0 - \frac{1}{2\log_{10} e} \log_{10} \frac{1 + th\varphi_0}{1 - th\varphi_0} = +0.0626670$$

$$\left.\begin{aligned}
(I) &= \frac{aA}{2KI_0} + \frac{B}{(2K)^2 I_0} = +224.73918 \\
(II) &= \frac{C}{2(2K)^2 I_0} - \frac{a^2 A}{2I_0} = -146.22277 \\
(III) &= \frac{A}{2KI_0} = +24.205288 \\
(IV) &= \frac{D}{2(2K)^3 I_0} + \frac{aC}{2(2K)^2 I_0} - \frac{a^2 B}{2(2K) I_0} - \frac{a^3 A}{2I_0} = -1507.3060 \\
(V) &= \frac{a^2 A}{2KI_0} + \frac{2aB}{(2K)^2 I_0} + \frac{C}{(2K)^3 I_0} = +2418.3243 \\
(VI) &= \frac{E}{4(2K)^3 I_0} - \frac{a^2 C}{2(2K) I_0} + \frac{2K a^4 A}{4 I_0} = +956\ 99052
\end{aligned}\right\} \text{PARA SEMIARCOS AB Y CD}$$

$$\left.\begin{aligned}
(I)' &= 2a \times (III) - (I) = +477.21420 \\
(II)' &= (II) = -146.22277 \\
(III)' &= (III) = +24\ 205288 \\
(IV)' &= 2a \times (II) - (IV) = -2733\ 1543 \\
(V)' &= 4a^2 \times (III) - 4a \times (I) + (V) = +9740\ 1003 \\
(VI)' &= (VI) = +956.99052
\end{aligned}\right\} \text{PARA SEMIARCO BC}$$

LAM.7

LAM. 8

CARGAS VERTICALES.

Carga vertical por metro: $\omega_v = b + cx^2$; $b = 72\ ^{Ton}/_{m}$, $c = 0.21403092\ ^{T}/_{m^3}$

$\sum \omega_v = 1261.5$ Ton. $\qquad \sum \omega = 1082.4$ Ton.

CALCULO DE LAS INTEGRALES QUE DEPENDEN DE LA CARGA VERTICAL

$$F = \frac{8}{3} \doteq Ch\varphi_0 - \frac{2}{Ch\varphi_0} + \frac{1}{3\,Ch^3\varphi_0} = -0.05026916$$

$$G = -\frac{1}{2} Sh\varphi_0\, Ch\varphi_0 - \frac{1}{3} th^3\varphi_0 - 2\, th\varphi_0 + \frac{5}{4}\,\frac{1}{\log_{10} e}\,\log_{10}\frac{1 + th\varphi_0}{1 - th\varphi_0} = +0.042208403$$

PARA SEMIARCO AB:

$$\text{VII} = -\frac{cE}{12I_0(2K)^5} - \frac{bC}{2I_0(2K)^3} - \frac{a(3b+a^2c)B}{3I_0(2K)^2} - \frac{a^2(2b+a^2c)A}{4I_0(2K)} = -118601.93$$

$$\text{VIII} = -\frac{cF}{12I_0(2K)^6} - \frac{acE}{12I_0(2K)^5} - \frac{bD}{2I_0(2K)^4} - \frac{a}{6}\,\frac{9b+20^2c}{I_0(2K)^3}\,C - \frac{a^2(18b+7a^2c)}{12I_0(2K)^2}\,B - \frac{a^3}{4}\,\frac{2b+a^2c}{2KI_0}\,A = -1358064.7$$

$$\text{IX} = -\frac{cG}{24I_0(2K)^6} + \frac{ca^2-6b}{24I_0(2K)^4}\,E - \frac{a}{6}\,\frac{3b+a^2c}{I_0(2K)^3}\,D - \frac{a^4cC}{8I_0(2K)^2} + \frac{G^3(3b+a^2c)}{6I_0(2K)}\,B + \frac{a^4(2b+a^2c)}{8I_0}\,A = +825261.92$$

PARA SEMIARCO BC:

$$\text{VII}' = -2\left[a \times \text{III} - \text{I}\right]\sum\omega_v + \text{VII} = -437108.16$$

$$\text{VIII}' = -\left[2a^2\,\text{III} - 3a\,\text{I} + \text{V}\right]2\sum\omega_v + 2a\,\text{VII} - \text{VIII} = -9197758.2$$

$$\text{IX}' = -\left[a \times \text{II} - \text{IV}\right]2\sum\omega_v + \text{IX} = +2371669.2$$

CALCULO DE V_1, H_1 Y M_1.

$$E\frac{\partial U_{AB}}{\partial V_1} = \text{V}\,V_1 + \text{IV}\,H_1 + \text{I}\,M_1 + \text{VIII} = 2418.3243\,V_1 - 1507.3060\,H_1 + 224.73918\,M_1 - 1358064.7 = 0$$

$$E\frac{\partial U_{AB}}{\partial H_1} = \text{IV}\,V_1 + \text{VI}\,H_1 + \text{II}\,M_1 + \text{IX} = -1507.3060\,V_1 + 956.99052\,H_1 - 146.22277\,M_1 + 825261.92 = 0$$

$$E\frac{\partial U_{AB}}{\partial M_1} = \text{I}\,V_1 + \text{II}\,H_1 + \text{III}\,M_1 + \text{VII} = 224.73918\,V_1 - 146.22277\,H_1 + 24.205288\,M_1 - 118601.93 = 0$$

$$E\frac{\partial U_{BC}}{\partial V_1} = \text{V}'\,V_1 + \text{IV}'\,H_1 + \text{I}'\,M_1 + \text{VIII}' = 9740.1003\,V_1 - 2733.1543\,H_1 + 477.21420\,M_1 - 9197758.2 = 0$$

$$E\frac{\partial U_{BC}}{\partial H_1} = \text{IV}'\,V_1 + \text{VI}'\,H_1 + \text{II}'\,M_1 + \text{IX}' = -2733.1543\,V_1 + 956.99052\,H_1 - 146.22277\,M_1 + 2371669.2 = 0$$

$$E\frac{\partial U_{BC}}{\partial M_1} = \text{I}'\,V_1 + \text{II}'\,H_1 + \text{III}'\,M_1 + \text{VII}' = 477.21420\,V_1 - 146.22277\,H_1 + 24.205288\,M_1 - 437108.16 = 0$$

$$E\frac{\partial U_{AB} + \partial U_{BC}}{\partial V_1} = +12158.425\,V_1 - 4240.4603\,H_1 + 701.95338\,M_1 - 10555823 = 0$$

$$E\frac{\partial U_{AB} + \partial U_{BC}}{\partial H_1} = -4240.4603\,V_1 + 1913.9810\,H_1 - 292.44554\,M_1 + 3196931.1 = 0$$

$$E\frac{\partial U_{AB} + \partial U_{BC}}{\partial M_1} = +701.95338\,V_1 - 292.44554\,H_1 + 48.410576\,M_1 - 555719.09 = 0$$

RESULTADOS NUMERICOS: $V_1 = +1261\ 5$ T $\qquad H_1 = +1086.89$ T. $\qquad M_1 = -246.61$ T.m.

$V' = -3605.4$ T. (de la ecuac. de equilib.: $V_1 + V' - 3\sum\omega_v - \sum\omega_p = 0$)

LAM. 9

CARGAS HORIZONTALES.

1°) CARGAS HORIZONTALES DEBIDAS A LA MASA DE LOS ARCOS Y DE LAS PILAS.~

Ley de carga de un arco: $\omega_{1h} = d + eX^2$; $d = 1.425\ T/m$; $e = 0.013436385\ T/m^3$

ω_{1h} = *carga por unidad de abscisa x*

CALCULO DE LAS INTEGRALES QUE DEPENDEN DE LA CARGA HORIZONTAL.

$$H = -\frac{16}{3} - \frac{1}{3}Ch^3\varphi_0 + 3Ch\varphi_0 + \frac{3}{Ch\varphi_0} - \frac{1}{3Ch^3\varphi_0} = -0.03661731$$

PARA SEMIARCOS AB y CD:

$$\mathrm{VII}_h = \frac{eF}{15I_0(2K)^5} + \frac{dD}{3I_0(2K)^3} + \frac{a(3d+ea^2)}{6I_0(2K)^2}C - \frac{a^3(5d+3ea^2)}{3aI_0}A = -1906.5009$$

$$\mathrm{VIII}_h = \frac{eG}{15I_0(2K)^5} + \frac{aeF}{15I_0(2K)^5} + \frac{dE}{3I_0(2K)^4} + \frac{a(5d+ea^2)D}{6I_0(2K)^3} + \frac{a^2(3d+ea^2)}{6I_0(2K)^2}C - \frac{a^3(5d+3ea^2)}{30I_0(2K)}B - \frac{a^4(5d+3ea^2)}{30I_0}A = -20\,694.058$$

$$\mathrm{IX}_h = \frac{eH}{30I_0(2K)^6} + \frac{5d-a^2e}{30I_0(2K)^4}F + \frac{a(3d+a^2e)}{12I_0(2K)^3}E - \frac{a^2dD}{6I_0(2K)^2} - \frac{a^3}{15}\frac{5d+2a^2e}{I_0(2K)}C + \frac{a^6}{60}\frac{2K}{I_0}(5d+3ea^2)A = +12901.814$$

PARA SEMIARCO BC:

$\sum\omega_{1h} = 34.316667\ T.$ $\qquad Y_1 = \frac{2}{5}f\,\frac{5d+ea^2}{3d+ea^2} = 4.20423\ m.$

$$\mathrm{VII}'_h = Y_1 \times (2\sum\omega_{1h}) \times \mathrm{III} + (2\sum\omega_{1h}) \times \mathrm{II} - \mathrm{VII}_h = -1144.8189$$

$$\mathrm{VIII}'_h = 2a\,\mathrm{VII}'_h - (2\sum\omega_{1h})Y_1\,\mathrm{I} - (2\sum\omega_{1h})\,\mathrm{IV} + \mathrm{VIII}_h = -15\,290.863$$

$$\mathrm{IX}'_h = 2(\sum\omega_{1h})Y_1 \times \mathrm{II} + 2(\sum\omega_{1h}) \times \mathrm{VI} - \mathrm{IX}_h = +10\,587.056$$

CALCULO DE LAS DERIVADAS DE LA ENERGIA.

PARA SEMIARCO AB:

$$E\frac{\partial U_{AB}}{\partial V_1} = \mathrm{V}\,V_1 + \mathrm{IV}\,H_1 + \mathrm{I}\,M_1 + \mathrm{VIII}_h = +2418.3243V_1 - 1507\ 3060H_1 + 224.73918M_1 - 20694.058$$

$$E\frac{\partial U_{AB}}{\partial H_1} = \mathrm{IV}\,V_1 + \mathrm{VI}\,H_1 + \mathrm{II}\,M_1 + \mathrm{IX}_h = -1507.3060V_1 + 956\ 99052H_1 - 146\ 22277M_1 + 12901.814$$

$$E\frac{\partial U_{AB}}{\partial M_1} = \mathrm{I}\,V_1 + \mathrm{II}\,H_1 + \mathrm{III}\,M_1 + \mathrm{VII}_h = +224\ 73918V_1 - 146\ 22277H_1 + 24.205289M_1 - 1906.5009$$

PARA SEMIARCO BC:

$$E\frac{\partial U_{BC}}{\partial V_1} = \mathrm{V}'V_1 + \mathrm{IV}'H_1 + \mathrm{I}'M_1 + \mathrm{VIII}'_h = +9740.1003V_1 - 2733.1543H_1 + 477.21420M_1 - 15290.863$$

$$E\frac{\partial U_{BC}}{\partial H_1} = \mathrm{IV}'V_1 + \mathrm{VI}'H_1 + \mathrm{II}'M_1 + \mathrm{IX}'_h = -2733.1543V_1 + 956.99052H_1 - 146\ 22277M_1 + 10587.056$$

$$E\frac{\partial U_{BC}}{\partial M_1} = \mathrm{I}'V_1 + \mathrm{II}'H_1 + \mathrm{III}'M_1 + \mathrm{VII}'_h = +477\ 21420V_1 - 146.22277H_1 + 24.205289M_1 - 1144.8189$$

CARGAS HORIZONTALES (CONTINÚA).~

PARA SEMIARCO CD:

$$H' = -H_1 - 211.19 \quad (\text{de la ecuación de equilibrio} .\ H' + H_1 = -3\sum\omega_h - \sum\omega_{Ph})$$

$$\sum\omega_{Ph} = 108.24\ T. \quad ; \quad h = 16\,m \quad ; \quad y' = 8.7273\ m.$$

$$V_c = \frac{1}{a}\left[-M_1 - M' - 2aV_1 - hH_1 - (h+y_1)\,3\sum\omega_h - (h-y')\sum\omega_{Ph}\right] = -0.06896552M_1 - 2V_1 - 1.1034483H_1 - 0.06896552M' - 197.73966$$

$$H_c = -\sum\omega_h = -34.316667$$

$$M_c = M_1 + 2aV_1 + hH_1 + M' + (2y_1 + 3h)\sum\omega_h + (h-y')\sum\omega_{Ph} = 29V_1 + 16H_1 + M_1 + M' + 2722.95$$

$$J = \left[\left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{V}}{a}\right)V_c + \left(\mathrm{II} - \frac{\mathrm{IV}}{a}\right)H_c + \left(\mathrm{III} - \frac{\mathrm{I}}{a}\right)M_c + \mathrm{VII}_h - \frac{\mathrm{VIII}_h}{a}\right] = 136.55860V_1 + 75.342680H_1 + 4.7089172(M_1 + M') + 13216.724$$

$$E\frac{\partial U_{CD}}{\partial V_1} = 2a \times J = +3960.1994V_1 + 2184.9377H_1 + 136.55860M_1 + 136.55860M' + 383\,285.00$$

$$E\frac{\partial U_{CD}}{\partial H_1} = h \times J = +2184.9376V_1 + 1205.4829H_1 + 75.342675M_1 + 75.342675M' + 211\,467.58$$

$$E\frac{\partial U_{CD}}{\partial M_1} = J = +136.55860V_1 + 75.342680H_1 + 4.7089172M_1 + 4.7089172M' + 13216.724$$

$$E\frac{\partial U_{CD}}{\partial M'} = J = +136.55860V_1 + 75.342680H_1 + 4.7089172M_1 + 4.7089172M' + 13216.724$$

PARA LA PILA.~

$$W = 8.61\ T/m \quad ; \quad w = 4.92\ T/m. \quad ; \quad K = \frac{t-a}{h} = -0.09375\,m. \quad ; \quad t = 2.00\,m. \quad ; \quad a = 3.50\,m. \quad ; \quad b = 10.25\,m.$$

$$A_1 = -\frac{1}{2K}\left[\frac{1}{t^2} - \frac{1}{a^2}\right] = +0.89795914 \quad ; \quad C_1 = \frac{1}{K^3}\left[\log_e\frac{t}{a} + 2a\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right)\right] + \frac{a^2}{K^2}A_1 = +110.277564$$

$$B_1 = -\frac{1}{K^2}\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right] - \frac{a}{K}A_1 = +9.14285562 \quad ; \quad D_1 = \frac{1}{K^4}\left[(t-a) - 3a\log_e\frac{t}{a} - 3a^2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right)\right] - \frac{a^3}{K^3}A_1 = +1428.4424$$

$$E_1 = \frac{1}{K^5}\left[\frac{t^2 - a^2}{2} - 4a(t-a) + 6a^2\log_e\frac{t}{a} + 4a^3\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right)\right] + \frac{a^4}{K^4}A_1 = +19274.88$$

$$E\frac{\partial U_P}{\partial H_1} = \frac{12}{b}\left[B_1M' - C_1H' - \frac{W}{2}D_1 + \frac{W-w}{h}E_1\right] = +129.10540H_1 + 10.703830M' + 25270.637$$

$$E\frac{\partial U_P}{\partial M'} = \frac{12}{b}\left[A_1M' - B_1M' - \frac{W}{2}C_1 + \frac{W-w}{h}D_1\right] = +10.703830H_1 + 1.0512692M' + 2090.4224$$

$$E\frac{\partial U_{AB} + \partial U_{BC} + \partial U_{CD}}{\partial V_1} = +16118.6240V_1 - 2055.5226H_1 + 838.1198M_1 + 136.55860M' + 347\,300.079 = 0$$

$$E\frac{\partial U_{AB} + \partial U_{BC} + \partial U_{CD} + \partial U_P}{\partial H_1} = -2055.5227V_1 + 3248.5593H_1 - 217.10287M_1 + 86.046505M' + 260\,227.087 = 0$$

$$E\frac{\partial U_{AB} + \partial U_{BC} + \partial U_{CD}}{\partial M_1} = +838.51198V_1 - 217.10286H_1 + 53.119495M_1 + 4.7089172M' + 10165.404 = 0$$

$$E\frac{\partial U_{CD} + \partial U_P}{\partial M'} = +136.55860V_1 + 86.04651H_1 + 4.7089172M_1 + 5.7601864M' + 15307.1464 = 0$$

$$\text{RESULTADOS NUMERICOS}\ \left\{\begin{array}{llll} V_1 = -4.79\,T. & H_1 = -59.997\,T. & M_1 = -231.68\,T.m. & M' = -1458.165\,T.m. \\ & H' = -151.193\,T. & V' = -0.62\,T. & \end{array}\right.$$

LOS VALORES DE V' Y H' SE OBTUVIERON DE LAS EC. DE EQUILIBRIO SIG.:

$$H_1 + H' = -3\sum\omega_h - \sum\omega_{Ph}$$

$$M_1 + M' + 3aV_1 + aV' - hH' = -3\left(\sum\omega_h\right)y_1 + \left(\sum\omega_{Ph}\right)y'$$

LAM. 10

CARGAS HORIZONTALES (CONTINÚA) LAM. 11

2°) — CARGAS HORIZONTALES CONCENTRADAS EN LAS CLAVES. (EFECTO DE LA INERCIA DE LA TUBERIA Y SUS SOPORTES).

$P = 125.7\ T.$ $f = 7.50\ m.$ $h = 16.00\ m.$

CALCULO DE LAS INTEGRALES QUE DEPENDEN DE LA CARGA.

$$\mathrm{VII}_h = 0 \qquad \mathrm{VII}'_h = \frac{P}{2I_0(2K)^2}\,C = +35.316883\,P$$

$$\mathrm{VIII}_h = 0 \qquad \mathrm{VIII}'_h = \frac{P}{2I_0}\,\frac{1}{(2K)^2}\left[-\frac{1}{2K}D + aC\right] = +845.95174\,P$$

$$\mathrm{IX}_h = 0 \qquad \mathrm{IX}'_h = \frac{P}{4I_0(2K)}\left[\frac{1}{(2K)^2}E - a^2C\right] = -139.68030\,P$$

CALCULO DE LAS DERIVADAS DE LA ENERGIA.

PARA SEMIARCO AB:

$$E\frac{\partial U_{AB}}{\partial V_1} = \mathrm{V}\,V_1 + \mathrm{IV}\,H_1 + \mathrm{I}\,M_1 = +2418.3243\,V_1 - 1507.3060\,H_1 + 224.73918\,M_1.$$

$$E\frac{\partial U_{AB}}{\partial H_1} = \mathrm{IV}\,V_1 + \mathrm{VI}\,H_1 + \mathrm{II}\,M_1 = -1507.3060\,V_1 + 956.99052\,H_1 - 146.22277\,M_1.$$

$$E\frac{\partial U_{AB}}{\partial M_1} = \mathrm{I}\,V_1 + \mathrm{II}\,H_1 + \mathrm{III}\,M_1 = +224\ 73918\,V_1 - 146\ 22277\,H_1 + 24.205288\,M_1.$$

PARA SEMIARCO BC.:

$$E\frac{\partial U_{BC}}{\partial V_1} = \mathrm{V}'V_1 + \mathrm{IV}'H_1 + \mathrm{I}'M_1 + \mathrm{VIII}' = +9740.1003\,V_1 - 2733\ 1543\,H_1 + 477.21420\,M_1 + 845.95174\,P$$

$$E\frac{\partial U_{BC}}{\partial H_1} = \mathrm{IV}'V_1 + \mathrm{VI}'H_1 + \mathrm{II}'M_1 + \mathrm{IX}' = -2733.1543\,V_1 + 956.99052\,H_1 - 146.22277\,M_1 - 139.68030\,P$$

$$E\frac{\partial U_{BC}}{\partial M_1} = \mathrm{I}'V_1 + \mathrm{II}'H_1 + \mathrm{III}'M_1 + \mathrm{VII}' = +477.21420\,V_1 - 146.22277\,H_1 + 24.205289\,M_1 + 35.316883\,P$$

PARA SEMIARCO CD:

$H' = -H_1 - \frac{3}{2}P$ (de la ecuación de equilibrio: $H' + H_1 = -\frac{3}{2}P$)

$P = 125.7\ T.$ $f = 7\ 50\ m$ $a = 14\ 50\ m$ $h = 16\ m.$

$$V_c = \frac{1}{a}\left[-M_1 - M' - 2aV_1 - hH_1 - \frac{3}{2}P(h+f)\right] = -2V_1 - 1.1034483\,H_1 - 0.06896552\,(M_1 + M') - 2.4310345\,P$$

$$H_c = H_1 + H' + P = -\frac{P}{2} = -0\ 5P$$

$$M_c = M_1 + 2aV_1 + M' + hH_1 + P\left(f + \frac{3}{2}h\right) = 29V_1 + 16H_1 + M_1 + M' + 31.5\,P$$

$$J_p = \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{V}}{a}\right)V_c + \left(\mathrm{II} - \frac{\mathrm{IV}}{a}\right)H_c + \left(\mathrm{III} - \frac{\mathrm{I}}{a}\right)M_c\Big] = +136.55860\,V_1 + 75.342676\,H_1 + 4.7089172\,(M_1 + M') + 154.47702\,P$$

$$E\frac{\partial U_{CD}}{\partial V_1} = 2a \times J_p = +3960.1995\,V_1 + 2184.9376\,H_1 + 136\ 55850\,M_1 + 136.55860\,M' + 4479.8337\,P$$

$$E\frac{\partial U_{CD}}{\partial H_1} = h \times J_p = +2184.9377\,V_1 + 1205.4828\,H_1 + 75.342675\,M_1 + 75.342675\,M' + 2471.6324\,P$$

$$E\frac{\partial U_{CD}}{\partial M_1} = J_p = +136\ 55860\,V_1 + 75.342676\,H_1 + 4.7089172\,M_1 + 4.7089172\,M' + 154.47702\,P$$

$$E\frac{\partial U_{CD}}{\partial M'} = J_p = +136.55860\,V_1 + 75.342676\,H_1 + 4.7089172\,M_1 + 4.7089172\,M' + 154.47702\,P$$

CARGAS HORIZONTALES (CONTINÚA).~

PARA LA PILA:

$$E\frac{\partial U_P}{\partial H_1} = \frac{12}{b}\left(B_1 M' - C_1 H'\right) = +129.1054\,H_1 + 10.70383\,M' + 193.65810\,P$$

$$E\frac{\partial U_P}{\partial M'} = \frac{12}{b}\left(A_1 M' - B_1 H'\right) = +10.70383\,H_1 + 1.0512692\,M' + 16.055745\,P$$

$$E\,\frac{\partial U_{AB}+\partial U_{BC}+\partial U_{CD}}{\partial V_1} = +16118.624\,V_1 - 2055.5227\,H_1 + 838.51198\,M_1 + 136.55860\,M' + 5325.7854\,P = 0$$

$$E\,\frac{\partial U_{AB}+\partial U_{BC}+\partial U_{CD}+\partial U_P}{\partial H_1} = -2055.5226\,V_1 + 3248.5692\,H_1 - 217.10287\,M_1 + 86.046505\,M' + 2525.6102\,P = 0$$

$$E\,\frac{\partial U_{AB}+\partial U_{BC}+\partial U_{CD}}{\partial M_1} = +838.51198\,V_1 - 217.10288\,H_1 + 53.119495\,M_1 + 4.7089172\,M' + 189.79390\,P = 0$$

$$E\,\frac{\partial U_{CD}+\partial U_P}{\partial M'} = +136.55860\,V_1 + 86.046506\,H_1 + 4.7089172\,M_1 + 5.7601864\,M' + 170.53277\,P = 0$$

RESULTADOS NUMERICOS.~

$$\left\{\begin{aligned} V_1 &= -0.19225836\,P = -24.17\ \text{T.} \\ H_1 &= -0.81641313\,P = -102.62\ \text{T.} \\ M_1 &= -2.9404065\,P = -369.61\ \text{T.m.} \\ M' &= -10.5407868\,P = -1324.98\ \text{T.m.} \end{aligned}\right.$$

$V' = -0.02364825\,P = -2.97$ T.

$H' = -0.68358687\,P = -85.93$ T.

LOS VALORES DE V' Y H' SE OBTUVIERON DE LAS EC. DE EQUILIBRIO SIGUIENTES:

$$H_1 + H' = -\tfrac{3}{2}P$$

$$2M_1 + 2M' + 6aV_1 + 2aV' - 2hH' + 3fP = 0.$$

EFECTO RESULTANTE.~

RESULTADOS OBTENIDOS DE CONSIDERAR LOS DOS EFECTOS SIMULTANEAMENTE (CARGAS VERT. Y HORIZ).

$V_1 = +1232.54$ T. $H_1 = +924.273$ T. $M_1 = -847.90$ T.m. $V' = -3608.99$ T.

$H' = -237.123$ T. $M' = -2783.145$ T.m.

REVISÓ:	ING. JUAN R. BRELIVET.
CALCULARON:	J. Gutiérrez P. A. J. Barocio
DIBUJÓ:	J. Gutiérrez Pereyra.

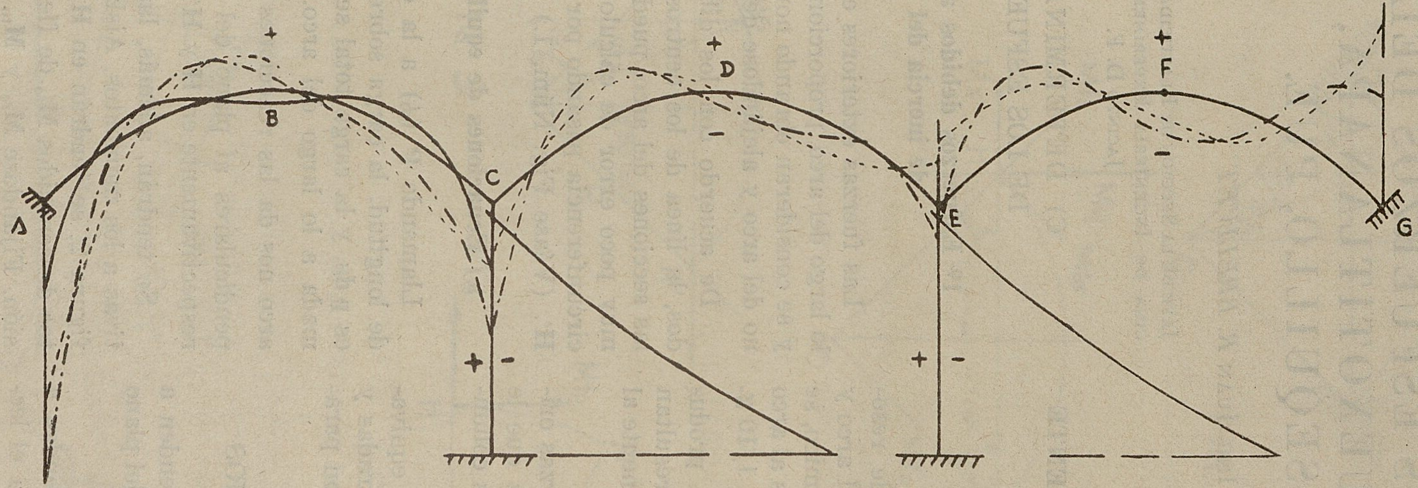
COMISION NACIONAL DE IRRIGACION
DIREC. DE ING.- DEPTO. DE PROY.- OFIC. DE ING. EXPERIM.

ARCO TRIPLE - PUENTE SIFON EN HUEXOTITLANAPA VALSEQUILLO. PUE.

Conforme:
JEFE DEL DEPTO. DEPTO. CONSULTIVO
Aprobó:
DIRECTOR DE INGENIERIA VOCAL EJECUTIVO.

MEXICO D. F. FEBRERO 1944 | LAM. 12

DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLEXIONANTES.



- - - - - - - - FUERZAS HORIZONTALES

———————— FUERZAS VERTICALES.

-·—·—·—·— EFECTOS COMBINADOS (FUERZAS VERT. Y HORIZ.)

ESC. DE LINEAS 1:400

ESCS. DE MOMENTOS { 1 cm. = 200 T.m. (ARCOS).
1 cm. = 500 T.m (PILAS).

COMISION NACIONAL DE IRRIGACION

DIREC. DE ING.- DEPTO. DE PROY.- OFIC. DE ING. EXPERIM.

ARCO TRIPLE - PUENTE SIFON
EN HUEXOTITLANAPA.
VALSEQUILLO. PUE.

Conforme:

JEFE DEL DEPTO. DEPTO. CONSULTIVO.

Aprobó:

DIRECTOR DE INGENIERIA VOCAL EJECUTIVO.

DIBUJÓ: J. Gutiérrez Pereyra.

VERIFICÓ ING. JUAN R. BRELIVET.

MEXICO D.F.
FEBRERO 1944

LAM. 13