

ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DE LOS TÉRMINOS DEL POTENCIAL GEOMAGNÉTICO

A. CHARGOY y L. CHARGOY*

RESUMEN

En los dos primeros capítulos se continuó con la exposición del cambio secular del campo geomagnético hasta la época 1975, dado por los primeros términos de la ecuación de Gauss.

En estos capítulos se analiza la ecuación del potencial geomagnético referida al sistema con origen en el punto C (definido por A. Chargoy como centro de una distribución):

$$(a) \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} \left[g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda \right] P_n^m$$

y se comprueba que los potenciales correspondientes a dipolo y cuadrípolo dan simetrías axial y ecuatorial respectivamente, por lo que la información de las anomalías magnéticas observadas en las cartas de isolíneas pueden buscarse a partir de octipolo en adelante.

En la ecuación (a) tradicionalmente se ha considerado que cada término de orden n corresponde al potencial de un multipolo de ese mismo orden. En el capítulo III de este trabajo se considera que si se construye un multipolo de ese tipo su potencial está dado por una serie donde el primer término es el potencial considerado tradicionalmente y los siguientes términos de la serie se definen como potenciales de multipolos matemáticos, así resulta que la ecuación (a) es una suma de series. También se estudian ciertas invariencias de estas series.

Se introduce un nuevo tipo de multipolo (hexapolo), no visto por los magnetistas hasta ahora, sugerido al observar la gráfica del disco solar dada al final del trabajo.

ABSTRACT

The first two chapters of this paper expose the secular variation of the geomagnetic field until the epoch of 1975 as given in the first terms of the potential equation of Gauss.

* Departamento de Geomagnetismo, Instituto de Geofísica, UNAM.

In those chapters the geomagnetic potential equation is analyzed in reference to the system with origin at the point C (defined by A. Chargooy as a center of distribution)

$$(a) \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} \left[g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \operatorname{sen} m\lambda \right] P_n^m$$

and proof is given that the potentials corresponding to dipole and cuadrupole give axial and equatorial symmetry respectively, so the information of magnetic anomalies as observed in isoline charts may be found from the octupole on.

In the equation (a) it has traditionally been considered that each term of order n corresponds to the potential of a multipole of that same order. In the third chapter of this paper it is considered that if a multipole of that type is constructed, its potential is given by a series where the first term is the potential traditionally considered and the following terms of the series are defined as potentials of mathematical multipoles, and so it results that the equation (a) is a sum of series. Certain invariants of these are also studied.

It is also introduced a new type of multipole (hexapole), unseen by the magnetists until now, which was suggested by the solar disk given at the end of this paper.

INTRODUCCIÓN

En trabajos anteriores se ha estudiado el potencial geomagnético analizando los términos de orden uno y dos de la ecuación dada por Gauss. En el presente trabajo se hace el estudio analizando términos hasta de orden tres (terceras derivadas) en dicha ecuación.

Es usual que en la ecuación mencionada se haga corresponder a los dos primeros términos, los modelos físicos de dipolo y cuadrípulo respectivamente. Como recordará el lector, al obtener el potencial del modelo de dipolo se hace un desarrollo en serie de la función $\frac{1}{r}$ y se toman sólo los términos de primeras derivadas, considerando que los demás términos son muy pequeños. En forma similar se trata al cuadrípulo en el cual la serie tiene como primeros términos las derivadas de orden dos y se considera, como en el caso del dipolo, que los términos siguientes pueden despreciarse.

Poniéndose en la realidad y considerando que el observador que se encuentra sobre la superficie del planeta está a una distancia $r = a$ del centro de referencia (como ocurre con las observaciones hechas para elaborar las cartas isomagnéticas) el potencial de esos citados modelos nos da mejor información del fenómeno, si se toman varios términos de su correspondiente serie.

Se toma en cuenta el análisis hecho para la época 1955 (M. G. de Álvarez, 1971) y se hace el de las épocas 1965 y 1975, en el que se considera un nuevo sistema de referencia, cuyo centro va a ser el punto C definido por Thompson (Bartels, 1936) como centro geomagnético y el cual queda determinado por las fórmulas dadas posteriormente por Schmidt (Bartels, 1936). Si se hace la transformación correspondiente para pasar del potencial calculado en el centro O al nuevo centro, se comprueba que expresado el potencial aquí, el potencial correspondiente al dipolo de simetría axial y el correspondiente al cuadripolo de simetría ecuatorial; por lo tanto las anomalías en general, hay que buscarlas en otros términos, a partir del de orden tres (octipolo). Se tomaron varias épocas para analizar los cambios que con el tiempo sufre el potencial.

El punto C es definido por A. Chargoy en forma más general como el centro de una distribución, el que puede ser centro de masa, de gravedad, geomagnético, de momento, etc., dependiendo de la función $f(r)$ que se considere (A. Chargoy, 1960).

CAPÍTULO I

La Tierra se considera esférica y el sistema de coordenadas es el geográfico, en el cual el plano XOY es el ecuador geográfico y el XOZ es el que contiene al meridiano de Greenwich. Las coordenadas esféricas de un observador colocado en un punto P sobre la superficie son $P(a, \lambda, \theta)$ (siendo λ la longitud y θ la colatitud). Los polinomios de Legendre se expresarán P_n^m ; por lo tanto, si en la ecuación del potencial geomagnético de origen interno que está dado por la ecuación:

$$(1) \quad V = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \left[g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda \right] P_n^m$$

consideramos el radio de la Tierra $a = 1$, se tiene para los primeros tres términos:

$$(2) \quad V = \frac{1}{r^2} \left[g_1^0 P_1^0 + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \sin \lambda) P_1^1 \right]$$

$$+ \frac{1}{r^3} \left[g_2^0 P_2^0 + (g_2^1 \cos \lambda + h_2^1 \sin \lambda) P_2^1 + (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \sin 2\lambda) P_2^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{r^4} \left[g_3^0 P_3^0 + \dots + (g_3^3 \cos 3\lambda + h_3^3 \sin 3\lambda) P_3^3 \right]$$

y cuyos coeficientes, para las épocas 1955, 1965 y 1975, aparecen en la Tabla I.

TABLA I

Autor	Época	g_1^0	g_1^1	h_1^1	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2
Finch-Leaton	1955	-3055	-227	590	-152	303	-190	158	24
IGRF	1965	-3034	-212	576	-165	299	-201	157	13
Barraclough, Harwood, Leaton y Malin	1975	-3010	-202	568	-191	301	-206	163	-6

Época	g_3^0	g_3^1	h_3^1	g_3^2	h_3^2	g_3^3	h_3^3
1955	118	-191	-45	126	29	91	-9
1965	130	-204	-40	129	24	84	-18
1975	128	-214	-33	125	27	83	-23

La unidad usada es:

$$1 \text{ unidad} = 10 \gamma = 10^{-4} \text{ oersteds.}$$

En este sistema se obtiene el momento reducido m_1 de dipolo y su dirección, tabla II; el momento reducido de cuadrípulo m_2 , la dirección de los ejes \overline{OH}_1 y \overline{OH}_2 del cuadrípulo y el ángulo que forman estos ejes, tabla III.

TABLA II

Época	θ_0	λ_0	m_1
1955	11°42'	68°57'	3120
1965	11°27'	69°48'	3096
1975	11°20'	70°25'	3070

TABLA III

Época	λ_1	θ_1	λ_2	θ_2	m_2	α
1955	153°48'	75°59'	-144°54'	156°55'	485.04	92°23'
1965	152°05'	74°46'	-147°21'	157°28'	492.08	93°24'
1975	151°52'	73°16'	-153°59'	157°22'	511.16	88°30'

La ecuación (1) se puede escribir así:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n, \text{ en que:}$$

$$V_n = \sum_{m=0}^n \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} \left[g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \operatorname{sen} m\lambda \right] P_n^m$$

Aplicando a esta ecuación un desarrollo de Taylor (traslación) hacia un nuevo sistema cuyos ejes son paralelos a los del sistema anterior y con origen en un punto O' (x' , y' , z') se tiene:

$$(3) \quad V = V_1 + (\Delta V_1 + V_2) + (\Delta^2 V_1 + \Delta V_2 + V_3) + \dots$$

donde:

$$\Delta V_1 = - \left[a_2^0 P_2^0 + (a_2^1 \cos \lambda + b_2^1 \operatorname{sen} \lambda) P_2^1 + (a_2^2 \cos 2\lambda + b_2^2 \operatorname{sen} 2\lambda) P_2^2 \right]$$

$$\Delta^2 V_1 = a_3^0 P_3^0 + \dots + (a_3^3 \cos 3\lambda + b_3^3 \operatorname{sen} 3\lambda) P_3^3$$

$$\Delta V_2 = - \left[\bar{a}_3^0 P_3^0 + \dots + (\bar{a}_3^3 \cos 3\lambda + \bar{b}_3^3 \operatorname{sen} 3\lambda) P_3^3 \right]$$

De manera que los coeficientes de la ecuación (1) referida al sistema con origen en O' son:

$g_1^0 g_1^1 h_1^1$ para el dipolo, es decir el dipolo permanece invariante bajo la traslación.

$\bar{g}_2^i = g_2^i - a_2^i$, $\bar{h}_2^i = h_2^i - b_2^i$, $i = 0, 1, 2$, para el cuadrípulo, donde los coeficientes a_2^i , b_2^i corresponden al cuadrípulo generado por el dipolo que residía en

O antes de la traslación. $\bar{g}_3^i = g_3^i - \bar{a}_3^i + a_3^i$, $\bar{h}_3^i = h_3^i - \bar{b}_3^i + b_3^i$, $i = 0, 1, 2, 3$ para el octipolo, los coeficientes a_3^i , b_3^i corresponden al octipolo generado por el dipolo que residía en O y \bar{a}_3^i , \bar{b}_3^i corresponden al octipolo generado por el cuadrupolo que residía también en O antes de la traslación.

En este nuevo sistema con centro en O' se tiene:

$$\Delta V_1 = (x', y', z') \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^1 \\ h_1^1 \\ g_1^0 \end{pmatrix}$$

con lo cual:

$$a_2^0 = 2g_1^0 z' - g_1^1 x' - h_1^1 y'$$

$$a_2^1 = (g_1^1 z' + g_1^0 x') \sqrt{3}$$

$$b_2^1 = (h_1^1 z' + g_1^0 y') \sqrt{3}$$

$$a_2^2 = (g_1^1 x' - h_1^1 y') \sqrt{3}$$

$$b_2^2 = (h_1^1 x' - g_1^1 y') \sqrt{3}$$

Si ahora se pide minimizar $\Delta V_1 + V_2$ significa que habrá que minimizar \bar{g}_2^i , h_2^i , para lo cual se puede aprovechar el valor medio cuadrático tomado sobre toda la superficie esférica:

$$|\Delta V_1 + V_2|^2 = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^2 [(g_2^i - a_2^i)^2 + (h_2^i - b_2^i)^2],$$

lo que conduce a las conocidas ecuaciones dadas por Schmidt:

$$x' = a (L_1 - g_1^1 E) / 3m_1^2$$

$$y' = a (L_2 - h_1^1 E) / 3m_1^2$$

$$z' = a (L_0 - g_1^0 E) / 3m_1^2$$

donde:

$$L_0 = 2 g_1^0 g_2^0 + (g_1^1 g_2^1 + h_1^1 h_2^1) \sqrt{3}$$

$$L_1 = -g_1^1 g_2^0 + (g_1^0 g_2^1 + g_1^1 g_2^2 + h_1^1 h_2^2) \sqrt{3}$$

$$L_2 = -h_1^1 g_2^0 + (g_1^0 h_2^1 - h_1^1 g_2^2 + g_1^1 h_2^2) \sqrt{3}$$

$$E = (L_0 g_1^0 + L_1 g_1^1 + L_2 h_2^1) / 4 m_1^2$$

Tomando el radio de la Tierra igual a 6368 km, las coordenadas de C en kilómetros para las épocas que se están analizando están en la siguiente tabla:

TABLA IV

Época	x'	y'	z'
1955	-367	205	118
1965	-367	223	133
1975	-378	236	161

En este nuevo sistema las coordenadas de un observador son $P(\bar{r}, \bar{\lambda}, \bar{\theta})$ donde \bar{r} se calcula fácilmente mediante el conocido teorema:

$$\bar{r} = \overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 - 2(\overline{OP})(\overline{OC}) \cos \varphi$$

siendo \overline{OP} el radio de la Tierra y la coordenada del observador, \overline{OC} la distancia del centro C al origen O y φ el ángulo formado por \overline{OP} y la distancia \overline{OC} .

Con los nuevos coeficientes \bar{g}_2^i \bar{h}_2^i para el cuadripolo, se obtiene el momento m_2 y la dirección de sus ejes CH_1 y CH_2 , en el sistema de referencia con origen en el centro magnético C y se dan en la Tabla V.

TABLA V

Epoca	λ_1	θ_1	λ_2	θ_2	m_2
1955	150°23'	80°54'	239°12'	97°17'	228
1965	148°40'	80°59'	237°28'	96°59'	224
1975	145°35'	80°48'	234°31'	96°33'	224

Los cosenos directores de los ejes del cudripolo residiendo en C son:

TABLA VI

Epoca	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2
1955	-0.8584	0.4881	0.1581	-0.5079	-0.8520	-0.1268
1965	-0.8427	0.5151	0.1567	-0.5339	-0.8368	-0.1215
1975	-0.8143	0.5580	0.1598	-0.5766	-0.8090	-0.1140

Los coeficientes para el octipolo trasladado al centro C se calculan con las ya conocidas fórmulas:

$$a_3^0 = \frac{1}{2} g_1^0 (3x'^2 + 3y'^2 - 6z'^2) + 3g_1^1 x' z' + 3h_1^1 y' z'$$

$$a_3^1 = \sqrt{6} \left[-2g_1^0 x' z' + \frac{1}{4} g_1^1 (-4z'^2 + 3x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2} h_1^1 x' y' \right]$$

$$b_3^1 = \sqrt{6} \left[-2g_1^0 y' z' + \frac{1}{2} g_1^1 x' y' + \frac{1}{4} h_1^1 (x'^2 + 3y'^2 - 4z'^2) \right]$$

$$a_3^2 = \sqrt{15} \left[\frac{1}{2} g_1^0 (y'^2 - x'^2) - g_1^1 x' z' + h_1^1 y' z' \right]$$

$$b_3^2 = -\sqrt{15} [g_1^0 x' y' + g_1^1 y' z' + h_1^1 x' z']$$

$$a_3^3 = 3 \sqrt{10} \left[\frac{1}{4} g_1^1 (y'^2 - x'^2) + \frac{1}{2} h_1^1 x' y' \right]$$

$$b_3^3 = 3 \sqrt{10} \left[-\frac{1}{2} g_1^1 x' y' + \frac{1}{4} h_1^1 (y'^2 - x'^2) \right]$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_3^3 = 3m_2 [x_1 x_2 z' + x_1 z_2 x' + z_1 x_2 x' + y_1 y_2 z' + y_1 z_2 y' + \\ + z_1 y_2 y' - 2 z_1 z_2 z'] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_3^1 = m_2 \frac{\sqrt{6}}{2} [x_1 y_2 y' + y_1 x_2 y' + y_1 y_2 x' + 3x_1 x_2 x' + \\ - 4 (x_1 z_2 z' + z_1 x_2 z' + z_1 z_2 x')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3^1 = m_2 \frac{\sqrt{6}}{2} [x_1 x_2 y' + x_1 y_2 x' + y_1 x_2 x' + 3y_1 y_2 y' + \\ - 4 (y_1 z_2 z' + z_1 y_2 z' + z_1 z_2 y')] \end{aligned}$$

$$\bar{a}_3^2 = m_2 \sqrt{15} [y_1 y_2 z' + y_1 z_2 y' + z_1 y_2 y' - x_1 x_2 z' - x_1 z_2 x' - z_1 x_2 x']$$

$$\bar{b}_3^2 = -m_2 \sqrt{15} [x_1 y_2 z' + x_1 z_2 y' + y_1 x_2 z' + y_1 z_2 x' + z_1 x_2 y' + z_1 y_2 x']$$

$$\bar{a}_3^3 = m_2 \frac{3\sqrt{10}}{2} [x_1 y_2 y' + y_1 x_2 y' + y_1 y_2 x' - x_1 x_2 x']$$

$$\bar{b}_3^3 = m_2 \frac{3\sqrt{10}}{2} [y_1 y_2 y' - x_1 x_2 y' - x_1 y_2 x' - y_1 x_2 x']$$

En esta forma los coeficientes de la ecuación (1) referida al sistema con origen en el centro C y ejes paralelos a los del primer sistema están en la tabla VII.

TABLA VII

Epoca	g_1^0	g_1^1	h_1^1	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2
1955	-3055	-227	590	-7	5	-39	168	95
1965	-3034	-212	576	-6	3	-37	171	83
1975	-3030	-202	568	-6	0	-37	179	65

\bar{g}_3^0	\bar{g}_3^1	\bar{h}_3^1	\bar{g}_3^2	\bar{h}_3^2	\bar{g}_3^3	\bar{h}_3^3
131	-184	-29	95	93	33	6
179	-131	-70	111	103	27	3
174	-126	-73	111	109	26	7

Por comodidad en adelante se escribirá g_2^1, h_2^1 , sin testar.

Comparando con la Tabla I, se observa la simplificación que se obtuvo al cambiar de un sistema a otro minimizando el valor promedio cuadrático del término de segundas derivadas, es decir, minimizando:

$$|V_2|^2 = \frac{1}{5} [(g_2^0)^2 + (g_2^1)^2 + (h_2^1)^2 + (g_2^2)^2 + (h_2^2)^2].$$

CAPÍTULO II

Conviene hacer una rotación R al sistema de referencia manteniendo desde luego el origen en el centro C y los nuevos ejes coincidiendo: CZ con \overline{CD} , dirección del dipolo, CX con $\overline{CH_1}$ y CY con $\overline{CH_2}$ siendo éstas las direcciones de los ejes del cuadrípolo.

Para hacer la rotación R, es conveniente escribir la ecuación (2) usando coordenadas cartesianas, en la forma:

$$\begin{aligned}
 V_1 + V_2 + V_3 + \dots &= \frac{1}{r^3} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \begin{pmatrix} g_1^1 \\ h_1^1 \\ g_1^0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2r^3} \bar{g}_2^0 + \frac{1}{r^5} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) A_2 \begin{pmatrix} \bar{x} \\ y \\ \bar{z} \end{pmatrix} \\
 (4) \quad &+ \frac{1}{r^5} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) B + \frac{1}{r^7} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) A_3 \begin{pmatrix} \bar{x} \\ y \\ \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ y \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \dots \\
 &= \frac{1}{r^3} \bar{X} \begin{pmatrix} g_1^1 \\ h_1^1 \\ g_1^0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2r^3} \bar{g}_2^0 + \frac{1}{r^5} \bar{X} A_2 \bar{X}' + \frac{1}{r^5} \bar{X} B + \frac{1}{r^7} \bar{X} A_3 \bar{X}' \bar{X}' + \dots
 \end{aligned}$$

donde: $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ son las coordenadas de un punto P en el sistema con origen en C.

\bar{X}' es el vector transpuesto de X.

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \bar{g}_2^2 & \bar{H}_2^2 & \bar{g}_2^1 \\ \bar{H}_2^2 & -\bar{g}_2^2 & h_2^1 \\ \bar{g}_2^1 & \bar{H}_2^1 & \sqrt{3} \bar{g}_2^0 \end{pmatrix}$$

$$B = -\frac{\sqrt{6}}{4} \begin{bmatrix} \bar{g}_3^1 \\ \bar{h}_3^1 \\ \sqrt{6} \bar{g}_3^0 \end{bmatrix}$$

A_3 es una matriz de orden $3 \times 3 \times 3$, es decir, un bloque formado por tres matrices A_x, A_y, A_z , de orden 3×3 cada una.

$$A_3 = \begin{bmatrix} (A_x) \\ (A_y) \\ (A_z) \end{bmatrix}$$

$$A_x = \begin{bmatrix} {}_1 a_1^1 & {}_1 a_1^2 & {}_1 a_1^3 \\ {}_1 a_2^1 & {}_1 a_2^2 & {}_1 a_2^3 \\ {}_1 a_3^1 & {}_1 a_3^2 & {}_1 a_3^3 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} {}_2 a_1^1 & {}_2 a_1^2 & {}_2 a_1^3 \\ {}_2 a_2^1 & {}_2 a_2^2 & {}_2 a_2^3 \\ {}_2 a_3^1 & {}_2 a_3^2 & {}_2 a_3^3 \end{bmatrix}, \quad A_z = \begin{bmatrix} {}_3 a_1^1 & {}_3 a_1^2 & {}_3 a_1^3 \\ {}_3 a_2^1 & {}_3 a_2^2 & {}_3 a_2^3 \\ {}_3 a_3^1 & {}_3 a_3^2 & {}_3 a_3^3 \end{bmatrix}$$

y los elementos de cada una de estas matrices son:

$${}_1 a_1^1 = \frac{\sqrt{10}}{4} \bar{g}_3^3, \quad {}_1 a_1^2 = \frac{\sqrt{10}}{4} h_3^3, \quad {}_1 a_1^3 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{g}_3^2$$

$${}_1 a_2^1 = \frac{\sqrt{10}}{4} \bar{h}_3^3, \quad {}_1 a_2^2 = -\frac{\sqrt{10}}{4} \bar{g}_3^3, \quad {}_1 a_2^3 = \frac{\sqrt{15}}{6} h_3^2$$

$${}_1 a_3^1 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{g}_3^2, \quad {}_1 a_3^2 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{h}_3^2, \quad {}_1 a_3^3 = \frac{5\sqrt{6}}{12} \bar{g}_3^1$$

$${}_2 a_1^1 = \frac{\sqrt{10}}{4} \bar{h}_3^3, \quad {}_2 a_1^2 = \frac{-\sqrt{10}}{4} \bar{g}_3^3, \quad {}_2 a_1^3 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{h}_3^2$$

$${}_2 a_2^1 = \frac{-\sqrt{10}}{4} \bar{g}_3^3, \quad {}_2 a_2^2 = \frac{-\sqrt{10}}{4} \bar{h}_3^3, \quad {}_2 a_2^3 = \frac{-\sqrt{15}}{6} \bar{g}_3^2$$

$${}_2 a_3^1 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{h}_3^2, \quad {}_2 a_3^2 = \frac{-\sqrt{15}}{6} \bar{g}_3^2, \quad {}_2 a_3^3 = \frac{5\sqrt{6}}{12} \bar{h}_3^1$$

$$\begin{aligned}
 {}_3a_1^1 &= \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{g}_3^2 & {}_3a_1^2 &= \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{h}_3^2 & {}_3a_1^3 &= \frac{5\sqrt{6}}{12} \bar{g}_3^1 \\
 {}_3a_2^1 &= \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{h}_3^2 & {}_3a_2^2 &= \frac{-\sqrt{15}}{6} \bar{g}_3^2 & {}_3a_2^3 &= \frac{5\sqrt{6}}{12} \bar{h}_3^1 \\
 {}_3a_3^1 &= \frac{5\sqrt{6}}{12} \bar{g}_3^1 & {}_3a_3^2 &= \frac{5\sqrt{6}}{12} \bar{h}_3^1 & {}_3a_3^3 &= \frac{5}{2} \bar{g}_3^0
 \end{aligned}$$

La matriz de la rotación de un sistema al otro es:

$$R = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ -x_0 & -y_0 & -z_0 \end{pmatrix}$$

donde x_0, y_0, \dots, z_2 son cosenos directores en las direcciones de los ejes \overline{CD} , \overline{CH}_1 y \overline{CH}_2 . Entonces aplicando la transformación $\overline{X} = \overline{X}R$ a la ecuación (4) el valor de \bar{r} no cambia y se tiene:

$$\begin{aligned}
 \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 + \dots &= \frac{1}{\bar{r}^3} \overline{X}R \begin{pmatrix} g_1^1 \\ h_1^1 \\ g_1^0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\bar{r}^3} \bar{g}_2^0 + \frac{1}{\bar{r}^5} (\overline{X}R A_2 R' \overline{X}') \\
 &+ \frac{1}{\bar{r}^5} (\overline{X}RB) + \frac{1}{\bar{r}^7} (\overline{X}R A_3 R' \overline{X}' R' \overline{X}') + \dots
 \end{aligned}$$

Cálculos para 1975.

Para facilitar la notación, en todo lo que sigue se usará (x, y, z) para denotar las coordenadas de un punto P, en el sistema con origen en C y los ejes ya rotado, en lugar de $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.

En los incisos a), b) y c) se verán los elementos que proporcionan el potencial de los tres primeros multipolos. La matriz de la rotación es:

$$R = \begin{pmatrix} -0.8143 & 0.5580 & -0.1598 \\ -0.5766 & -0.8090 & -0.1140 \\ 0.0657 & -0.1850 & 0.9805 \end{pmatrix}$$

a) Dipolo

$$\text{Ya que: } V_1 = \frac{1}{r^3} X R \begin{pmatrix} g_1^1 \\ h_1^1 \\ g_1^0 \end{pmatrix}$$

efectuando las operaciones se tiene:

$$V_1 = \frac{1}{r^3} [0.356 x + 0.256 y - 3069.723 z]$$

donde la aparición de coeficientes pequeños en x, y al lado del coeficiente de z, proviene del método de cálculo seguido que debió proporcionar el valor cero para esos coeficientes y la última ecuación debe ser:

$$V_1 = -\frac{1}{r^3} 3070 z = -\frac{3070}{r^2} P_1^0$$

Es decir, en este sistema se tiene un dipolo en la dirección Z y de momento $m_1 = 3070$, que comprueba el valor de la Tabla II. Obsérvese que el dipolo está expresado con un solo coeficiente, el \bar{g}_1^0 .

b) Cuadripolo

$$V_2 = -\frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{2} \bar{g}_2^0 \right) + \frac{1}{r^5} (X R A_2 R' X')$$

Después de efectuar los productos en el segundo miembro de la expresión se tiene:

$$V_2 = -\frac{1}{r^3} (-3.05) + \frac{1}{r^5} [-3.08 x^2 - 3.07 y^2 - 3.04 z^2 + 2(168.05xy)]$$

simplificando y transformando a coordenadas esféricas se obtiene:

$$V_2 = \frac{1}{r^3} [194.05 \text{ sen } 2\lambda P_2^2]$$

lo cual indica que en el nuevo sistema se tiene un cuadripolo con ejes \overline{CH}_1 y \overline{CH}_2 en las direcciones de los ejes x, y, respectivamente y de momento:

$$m_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \overline{h^2} = 224,$$

valor que comprueba el obtenido en la Tabla V. Como se ve, la expresión del cuadrípulo en este sistema también se ha simplificado.

c) Octipolo

$$V_3 = \frac{1}{\bar{r}^5} (\text{X R B}) + \frac{1}{\bar{r}^7} (\text{X R A}_3 \text{ R}' \text{ X}' \text{ R}' \text{ X}'')$$

Efectuando los productos indicados se obtiene:

$$V_3 = \frac{1}{\bar{r}^5} [-79.66x - 51.01y - 258.51z] + \frac{1}{\bar{r}^7} [-2.22x^3 + 7.97y^3 + 412.98z^3 + 44.54x^2y - 16.86x^2z - 82.30y^2x + 70.41y^2z + 487.24z^2x + 186.64z^2y + 554.65xyz]$$

Por comodidad en el trabajo algebraico se escribirá como sigue:

$$V_3 = \frac{1}{\bar{r}^5} (ax + by + cz) + \frac{1}{\bar{r}^7} (dx^3 + e x^2y + f x^2z + gxy^2 + hxyz + lxz^2 + my^3 + ny^2z + pyz^2 + q z^3)$$

que expresado en armónicos esféricos debe tener la forma:

$$V_3 = \frac{1}{\bar{r}^4} \sum_{l=1}^3 (g_l^1 \cos i\lambda + h_l^1 \sin i\lambda) P_l^1$$

Para pasar de la primera expresión a la segunda se hizo uso de algunas identidades trigonométricas, que el lector puede pasar por alto, pero que se dan por si tuviera curiosidad de comprobar:

$$\text{sen } 2\lambda = 2 \text{ sen } \lambda \cos \lambda$$

$$\cos 2\lambda = 2 \cos^2 \lambda - 1 = 1 - 2 \text{ sen}^2 \lambda$$

$$\text{sen } 3\lambda = 3 \text{ sen } \lambda - 4 \text{ sen}^3 \lambda$$

$$\cos 3\lambda = 4 \cos^3 \lambda - 3 \cos \lambda$$

$$\text{sen}^2 \lambda \cos \lambda = \frac{1}{3} (\cos^3 \lambda - \cos 3\lambda)$$

$$\cos^2 \lambda \text{ sen } \lambda = \frac{1}{3} (\text{sen } 3\lambda + \text{sen}^3 \lambda)$$

con lo que se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned}
 V_3 = \frac{1}{r^4} & \left\{ \left(q - \frac{f+n}{2} \right) \cos^3 \theta + \left(c + \frac{f+n}{2} \right) \cos \theta \right. \\
 & + \left[\left(l - \frac{3d+g}{4} \right) \cos \lambda + \left(p - \frac{3m+e}{4} \right) \operatorname{sen} \lambda \right] \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta \\
 & + \left[\left(a + \frac{3d+g}{4} \right) \cos \lambda + \left(b + \frac{3m+e}{4} \right) \operatorname{sen} \lambda \right] \operatorname{sen} \theta \\
 & + \left[\left(\frac{f-n}{2} \cos 2\lambda + \left(\frac{h}{2} \right) \operatorname{sen} 2\lambda \right) \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta \right. \\
 & \left. + \left[\left(\frac{d-g}{4} \right) \cos 3\lambda + \left(\frac{e-m}{4} \right) \operatorname{sen} 3\lambda \right] \operatorname{sen}^3 \theta \right\},
 \end{aligned}$$

de la cual se calculan fácilmente los coeficientes g_3^1 , h_3^1 y finalmente la expresión para el octipolo en este sistema es:

$$\begin{aligned}
 V_3 = \frac{1}{r^4} & [154.46 P_3^0 + (166.39 \cos \lambda + 55.37 \operatorname{sen} \lambda) P_3^1 \\
 & + (22.53 \cos 2\lambda + 143.21 \operatorname{sen} 2\lambda) P_3^2 + (25.32 \cos 3\lambda + \\
 & + 11.54 \operatorname{sen} 3\lambda) P_3^3]
 \end{aligned}$$

Si los resultados obtenidos en los párrafos a), b) y c) se escriben en la ecuación (4) del potencial, se tiene:

$$\begin{aligned}
 V = -\frac{1}{r^2} \bar{g}_1^0 P_1^0 + \frac{1}{r^3} \left[\bar{h}_2^2 \operatorname{sen} 2\lambda P_2^2 \right] + \frac{1}{r^4} \left[\bar{g}_3^0 P_3^0 + \right. \\
 + (\bar{g}_3^1 \cos \lambda + \bar{h}_3^1 \operatorname{sen} \lambda) P_3^1 + (\bar{g}_3^2 \cos 2\lambda + \bar{h}_3^2 \operatorname{sen} 2\lambda) P_3^2 + (\bar{g}_3^3 \cos 3\lambda + \\
 \left. + \bar{h}_3^3 \operatorname{sen} 3\lambda) P_3^3 \right]
 \end{aligned}$$

se puede decir que esta última es la forma canónica de la ecuación, pues el sistema de referencia quedó determinado por los ejes de los multipolos, dados en las expresiones:

$$V_1 = \frac{1}{r^3} (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z}) \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \frac{1}{r^4} (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{pmatrix}$$

donde los vectores \bar{u}_1 , \bar{u}_2 , \bar{v}_2 quedan definidos por la distribución de carga magnética que produce el campo.

A continuación se dan tablas de los coeficientes de la ecuación de Gauss, en los diferentes sistemas de referencia y para las tres épocas analizadas.

TABLA VIII. ÉPOCA 1955

	g_1^0	g_1^1	h_1^1
Sistema I	-3055	-227	590
Sistema II	-3055	-227	590
Sistema III	-3120	0	0

	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2
Sistema I	-152	303	-190	158	24
Sistema II	-7	5	-39	168	97
Sistema III	0	0	0	0	197

	g_3^0	g_3^1	h_3^1	g_3^2	h_3^2	g_3^3	h_3^3
Sistema I	118	-191	-45	126	29	91	-9
Sistema II	168	-123	-68	102	104	33	6
Sistema III	145	169	39	1	136	24	-2

TABLA IX. ÉPOCA 1965

	g_1^0	g_1^1	h_1^1
Sistema I	-3034	-212	576
Sistema II	-3034	-212	576
Sistema III	-3095	0	0

	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2
Sistema I	-165	299	-201	157	13
Sistema II	-6	3	37	171	83
Sistema III	0	0	0	0	194

	g_3^0	g_3^1	h_3^1	g_3^2	h_3^2	g_3^3	h_3^3
Sistema I	130	-204	-40	129	24	84	-18
Sistema II	179	-131	-70	111	104	27	3
Sistema III	156	175	44	0	142	24	5

TABLA X. ÉPOCA 1975

	g_1^0	g_1^1	h_1^1
Sistema I	-3010	-202	568
Sistema II	-3010	-202	568
Sistema III	-3070	0	0

	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2
Sistema I	-191	301	206	163	-6
Sistema II	-6	0	-37	179	65
Sistema III	0	0	0	0	194

	g_3^0	g_3^1	h_3^1	g_3^2	h_3^2	g_3^3	h_3^3
Sistema I	128	-214	-33	125	27	83	-23
Sistema II	174	-126	-73	111	109	26	7
Sistema III	154	166	55	22	143	25	12

El valor cuadrático V_n , tomado sobre toda la superficie terrestre dado por:

$$|V_n|^2 = \sum_{m=0}^n \frac{1}{2n+1} [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2],$$

se calcula en los diferentes sistemas de referencia y para las tres épocas.

TABLA XI

	Época 1955			Época 1965			Época 1975		
	V ₁	V ₂	V ₃	V ₁	V ₂	V ₃	V ₁	V ₂	V ₃
Sistema I	1801	188	105	1787	191	110	1772	198	112
Sistema II	1801	88	100	1787	87	105	1772	87	104
Sistema III	1801	88	100	1787	87	105	1772	87	104

CAPÍTULO III

En el sistema de coordenadas referido a C y a sus ejes propios, se ve con mucha claridad que el potencial debido al dipolo tiene simetría axial alrededor del eje Z. También el potencial correspondiente al cuadrípulo tiene simetría ecuatorial, por lo tanto, si sólo existieran estos términos de dipolo y cuadrípulo, la geometría de las isolíneas sería muy regular, pero de la observación de las cartas de isolíneas (de 1965 por ejemplo), se ve que esa regularidad no existe. Obviamente, estas irregularidades son producidas por anomalías magnéticas provenientes del interior del planeta y se podría buscar información de ellas a partir de los términos de terceras derivadas (octipolo) en adelante.

Conviene hacer un pequeño análisis de la estructura de la ecuación del potencial:

$$(6) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} [g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \operatorname{sen} m\lambda] P_n^m$$

Por la facilidad en la interpretación, incluimos el caso gravimétrico que pudiera parecer obvio pero es sugestivo de lo que hay que hacer cuando el índice n es diferente de cero, como en el caso magnético.

Como se ha hecho en capítulos anteriores se usa la ecuación (6) o la correspondiente forma matricial:

$$V = (\sum m_1) f(r) + (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z}) \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2!} (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{pmatrix} + \dots$$

en donde cada uno de los términos, como se ve, da una combinación lineal de todas las derivadas de un mismo orden, de manera que el término siguiente de derivadas de orden tres, se puede escribir:

$$V_3 = \frac{1}{3!} \bar{u}_3 A_3 \bar{v}'_3 \bar{w}'_3$$

A_3 es una matriz de orden $3 \times 3 \times 3$, estructura semejante a la usada en el capítulo II.

En forma similar se van a formar los términos siguientes. El primer término podría escribirse como: $V_0 = u_0 A_0$, A_0 representa la derivada de orden cero de la función f .

Caso gravimétrico

Sea E una esfera de radio a , con distribución homogénea de masa sobre la superficie y con centro en C , C centro del sistema de referencia; su potencial newtoniano para un observador $P(r, \lambda, \theta)$ en que $r \geq a$, como es bien sabido, es:

$$V = \frac{M}{r}$$

donde M es la suma de la masa.

Desde luego que en la ecuación (6), por las simetrías que en todas direcciones tiene la esfera con respecto a su centro, obliga a que g_n^m y h_n^m sean iguales a cero cuando n diferente de cero, lo que lleva a la ecuación antes mencionada.

Supóngase que para obtener ese mismo potencial V , se hiciera con un sistema de referencia con centro en Q y en el cual $Q(0, 0, h)$, entonces el potencial se podría obtener por un desarrollo de Taylor a partir de la ecuación (6) que está referida a C como:

$$V = \frac{M}{r} - h M \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{h^2 M}{2!} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \dots$$

Para cualquier desarrollo que se hiciera escogiendo como centro de referencia cualquier otro punto, se ve que el primer término permanecería invariante y los otros términos dependerían de las coordenadas del punto Q .

Por otro lado, los términos a partir de la primera derivada se pueden definir como potenciales de multipolos matemáticos de órdenes uno, dos, etc., porque físicamente no está el elemento que podría tener ese potencial

en este experimento; por ejemplo, el término $h M \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right)$ en el fenómeno magnético se encuentra como potencial de un dipolo.

Lo que se ha dicho para este término de primeras derivadas en este desarrollo puede hacerse extensivo para cualquier término de las derivadas siguientes tomado aisladamente, y que físicamente, en algún otro experimento, pudiera corresponder a un fenómeno físico.

Desde luego que si Q tuviera coordenadas (h_1, h_2, h_3) el elemento de primeras derivadas que tendría la forma:

$$M \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right) + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r}\right) + h_3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right) \right]$$

nos muestra que los multipolos matemáticos sí se alteran con un traslado de los ejes de referencia.

Como se ve fácilmente, bajo rotaciones en el sistema de referencia, los vectores coeficientes por la izquierda y por la derecha de la matriz A_1 mantienen su valor absoluto, lo que se ve de inmediato en la expresión del dipolo matemático, del cuadripolo también matemático:

$$\frac{1}{2!} (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{pmatrix}$$

y así los demás multipolos matemáticos.

Se observa que cuando $r \gg a$ a los términos de multipolos matemáticos tienden más rápidamente a cero que la parte invariante y se tiene nuevamente $V = \frac{M}{r}$, término que puede definirse como potencial de unipolo físico.

Dipolo magnético

Siguiendo las sugerencias que se tienen del ejemplo anterior para el unipolo, en el caso del dipolo magnético se tienen las siguientes deducciones:

Sean las cargas $-m$ residiendo en $Q(0,0,-h)$ y $+m$ en $Q_1(0,0,h)$, figura 1.

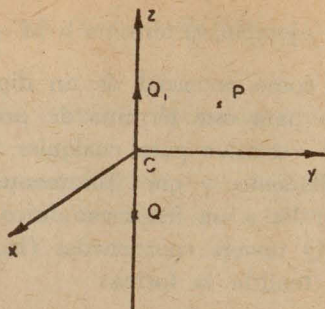


Figura 1.

Para un punto $P(x, y, z)$ ó (r, λ, θ) con $2h < r < \infty$ el potencial debido a estas dos cargas, como es sabido, está dado por la forma canónica:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{2hm}{1!} f_z - \frac{2h^3m}{3!} f_{z^3} - \frac{2h^5m}{5!} f_{z^5} - \dots \\ &= -M_1 \left[f_z + \frac{h^2}{3!} f_{z^3} + \frac{h^4}{5!} f_{z^5} + \dots \right] \end{aligned}$$

donde f es la función $\frac{1}{r}$ y los índices z, z^3, z^5, \dots indican orden de derivación con respecto a z , como se ha usado a lo largo de este trabajo.

Obsérvese que el primer elemento sí corresponde al potencial de un dipolo físico cuando r se considera muy grande.

Si se tomara cualquier otro punto como centro del sistema de referencia y Q, Q_1 colocados menos simétricamente, como en la figura 2, por ejemplo, el potencial en el punto $P(x, y, z)$, debido a la presencia del dipolo $\overline{QQ_1}$ sería:

$$\begin{aligned} V &= -m(x_1 f_x + y_1 f_y + z_1 f_z) + \frac{m}{2!} (x_1^2 f_{xx} + 2x_1 y_1 f_{xy} + \dots) + \dots \\ &= m(x_1, y_1, z_1) \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} + \dots \end{aligned}$$

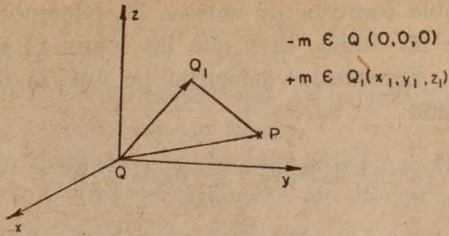


Figura 2.

Aquí se ve que se conserva invariante el primer término, en efecto, se tiene:

$$|\vec{M}_1| = ml = 2hm = m \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

en cambio, los términos a partir de segundas derivadas corresponden a potenciales de multipolos matemáticos similares a los que se vieron en el primer ejemplo.

Cuadripolo

Considérese un multipolo con la estructura geométrica dada en la Figura 3, los lados son de un paralelogramo en cuyos vértices se encuentran las cargas -m en Q₁, +m en Q₂, -m en Q₃ y +m en Q₄.

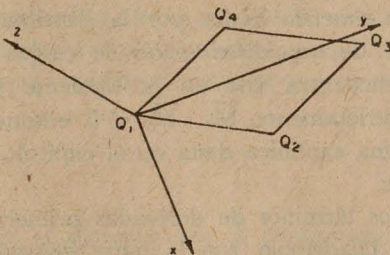


Figura 3.

Siempre es posible construir un sistema de referencia tal que el origen contenga a una de las cargas $-m$ y que las cuatro cargas queden situadas en el plano XOY. Entonces el potencial de este multipolo (cuadripolo) puede escribirse como:

$$V_2 = \frac{1}{2!} \bar{u}_2 A_2 \bar{v}_2' + \frac{1}{3!} \bar{u}_3 A_3 \bar{v}_3' \bar{w}_3' + \dots$$

Si $M_2 = |\bar{u}| |\bar{v}|$ y $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ vectores unitarios de \bar{u} y \bar{v} , el eje y puede tomarse de tal manera que: $x_2 = x_1, y_2 = -y_1$ y por lo tanto:

$$V_2 = \frac{M_2}{2!} (x_1^2 f_{xx} - y_1^2 f_{yy}) + \dots$$

expresión diferencial hiperbólica donde el término de segundas derivadas da la forma invariante de la ecuación del potencial de cuadripolo, los términos siguientes serían potenciales de multipolos matemáticos.

La parte invariante que tiene la expresión diferencial hiperbólica puede darse en forma hiperbólica equilátera, cuando aparte de existir en la región la distribución de cuadripolo existe una forma dipolar, que como se vio en los capítulos I y II en el caso del potencial terrestre dado en el sistema de referencia 0, se pasa al sistema de referencia en C y con transformaciones convenientes se obtiene la expresión que se puede definir como canónica:

$$(7) \quad V = -\frac{1}{r^2} g_1^{\circ} P_1^{\circ} + \frac{1}{r^3} [h_2^2 \text{sen } 2\lambda P_2^2] + \frac{1}{r^4} [g_3^{\circ} P_3^{\circ} + \dots] + \dots$$

Se está usando el lenguaje propio de la geometría analítica, por el isomorfismo que hay en el manejo de las formas cuadráticas de la geometría, y el manejo de la ecuación del potencial que nos ocupa, en los términos de primeras y segundas derivadas, al determinar sistemas de referencia que coinciden con ejes de simetría dados por la distribución.

Otra forma posible de una distribución de cargas $-m_1, +m_1$ y $-m_2, +m_2$ es cuando se encuentra uno en la siguiente situación: Sea $\bar{M}_1 = m_1 \bar{l}_1, \bar{M}_2 = m_2 \bar{l}_2$, si estrictamente $\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 < 0$ entonces el potencial va a poderse llevar a la forma canónica dada en el capítulo II, es decir, la ecuación (7) que antecede.

En esta ecuación los términos de derivadas primeras y segundas, correspondientes al dipolo y cuadripolo, son la parte invariante de los multipolos que pueden definirse físicos, a esta parte invariante le corresponden multi-

polos matemáticos que se encuentran en los términos de terceras derivadas en adelante.

Si $\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 \geq 0$ se ve fácilmente que el potencial de esta distribución es absorbido por el potencial de un dipolo.

Otras formas de multipolos de segundo orden que el lector pudiera encontrar en alguna otra rama del análisis y que se dan a conocer son:

- a) La distribución de cargas: $+m$ residiendo en el punto $Q_1 (-h, 0, 0)$, $-2m$ en $0 (0, 0, 0)$ y $+m$ en $Q_2 (h, 0, 0)$ cuyo potencial estará dado por la expresión diferencial parabólica:

$$V = \frac{M_2}{2!} f_{xx} + \dots,$$

se ve que el eje de simetría de la distribución es el eje OY.

- b) La distribución de cargas: $+m$ residiendo en $Q_1(0, h, 0)$, $+m$ en

$$Q_2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}h, -\frac{h}{2}, 0 \right), +m \text{ en } Q_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}h, -\frac{h}{2}, 0 \right) \text{ y}$$

$-3m$ en $0(0, 0, 0)$ cuyo potencial estará dado por la expresión diferencial elíptica:

$$V = \frac{3}{8} M_2 (f_{xx} + f_{yy}) + \dots,$$

en este caso el eje de simetría escogido para referencia también es el OY.

Estos casos se dan solamente para ver que existe isomorfismo para las tres posibilidades entre las expresiones diferenciales homogéneas de segundo orden que pueden presentarse en la ecuación del potencial que se está tratando y las formas cuadráticas de la geometría en su forma canónica.

En estos dos ejemplos se vio exclusivamente la parte invariante del potencial correspondiente y pueden encontrarse en problemas de electricidad y otros.

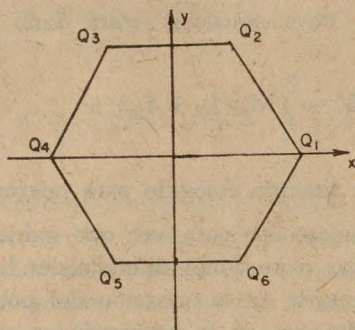
Hexapolo

Pudiera parecer ocioso el ejemplo que a continuación vemos de un multipolo generado por una distribución polarizada en seis puntos, que tradicionalmente no ha sido tratada en el estudio que nos concierne y cuyo

potencial está dado en la parte invariante a partir de terceras derivadas de la función $f(r)$.

Si se observa la gráfica del disco solar dada a continuación (obtenida de Scientific American, Nov. 1966) se encontrará que aparte de la polarización predominante en casquetes en los hemisferios norte y sur, con flujos de carga magnética similares a los que presentan las cartas terrestres, v.g. las editadas para 1965 por U. S. Naval Oceanographic Office, aparte de esa polarización que da la parte de dipolo en la ecuación de Gauss, se encontrará una distribución dipolar aparentemente errática en el resto del disco en forma de dipolos que tienden a estar colocados en planos paralelos al ecuador solar y orientados de oeste a este. Desde luego que esta última distribución de carga provee una resultante (entre otras) en forma de cuadrípulo, como se trató en el capítulo II, como también puede proveer, por la misma razón que produce el cuadrípulo, una resultante como se muestra en la figura 5, así como la resultante de octipolo, como la han definido algunos magnetistas.

Desde luego que también pueden aparecer multipolos cuyo potencial empieza en derivadas de orden superior.



$$\begin{aligned}
 & -m \in Q_1 (h, 0, 0) \\
 & +m \in Q_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} h, \frac{h}{2}, 0 \right) \\
 & -m \in Q_3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} h, \frac{h}{2}, 0 \right) \\
 & +m \in Q_4 (-h, 0, 0) \\
 & -m \in Q_5 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} h, -\frac{h}{2}, 0 \right) \\
 & +m \in Q_6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} h, -\frac{h}{2}, 0 \right)
 \end{aligned}$$

FIG. 5

Aquí se tratará simplemente de los multipolos cuyo potencial empieza en derivadas de orden tres.

En primer lugar, para obtener la ecuación del potencial de la distribución de polos que se ve en la figura 5, por comodidad se escoge un sistema de referencia en el cual se tendrán los momentos de los dipolos dados por $M_1 = mQ_1Q_2$, $M_2 = mQ_3Q_4$ y $M_3 = mQ_5Q_6$.

En estas condiciones, haciendo el cálculo se obtiene:

$$V = \frac{-m}{3!} \left(\frac{9}{2} h^3 f_{xyy} - \frac{3}{2} h^3 f_{xxx} \right) + \dots$$

Si esta distribución no estuviera contenida en el plano ecuatorial sino en un plano paralelo, con un desarrollo de Taylor se obtendría el potencial correspondiente en el cual el primer término del desarrollo sería el que se ve en esta ecuación, es decir, ésta es la parte invariante del potencial de este multipolo.

Aunque el análisis que se ha hecho de este multipolo se ha tomado de lo que se sugiere del disco solar, no hay motivos para negar que en la Tierra el campo no presente esta particularidad. Con este multipolo va a ocurrir lo mismo que ocurrió en el cuadripolo, que puede presentar algunas irregularidades en su geometría y en que los valores absolutos de M_i , $i = 1, 2, 3$ no sean precisamente iguales.

Octipolo

El término de orden tres de la ecuación de Gauss que está dado en la forma:

$$V_3 = \frac{1}{r^4} \sum_{m=0}^3 (g_3^m \cos m\lambda + h_3^m \operatorname{sen} m\lambda) P_3^m$$

puede escribirse:

$$V_3 = \frac{1}{3!} \bar{u}_3 A_3 \bar{v}'_3 \bar{w}'_3$$

en la cual están incluidos: a) un término de orden tres correspondiente al potencial de un octipolo matemático que puede provenir del potencial del dipolo, como se vio en un párrafo anterior y que está dado por:

$${}_1V_3 = \frac{1}{r^4} [{}_1g_3^0 P_3^0],$$

se introduce el índice por la izquierda en V_3 para denotar el potencial de octipolo que proviene de primeras derivadas, así como en la constante que expresa a este potencial y cuyo valor es ${}_1g_3^0 = M_1 h^2$.

b) El potencial de un octipolo también matemático ${}_2V_3$, que proviene del potencial V_2 del cuadrupolo y que se obtiene también mediante un desarrollo de Taylor, el cual está dado por:

$${}_2V_3 = \frac{1}{r^4} [{}_2g_3^0 P_3^0 + ({}_2g_3^1 \cos \lambda + {}_2h_3^1 \sin \lambda) P_3^1 + {}_2g_3^2 \cos 2\lambda P_3^2 + ({}_2g_3^3 \cos 3\lambda + {}_2h_3^3 \sin 3\lambda) P_3^3],$$

los valores de las constantes son:

$${}_2g_3^0 = M_2 \frac{3}{2} (z_0 y_1^2 - z_0 x_1^2)$$

$${}_2g_3^1 = M_2 \frac{\sqrt{6}}{4} (x_0 y_1^2 - 3 x_0 x_1^2)$$

$${}_2g_3^2 = M_2 \frac{\sqrt{15}}{2} (z_0 x_1^2 + z_0 y_1^2)$$

$${}_2g_3^3 = M_2 \frac{3\sqrt{10}}{4} (x_0 x_1^2 + x_0 y_1^2)$$

$${}_2h_3^1 = M_2 \frac{\sqrt{6}}{4} (3 y_0 y_1^2 - y_0 x_1^2)$$

$${}_2h_3^2 = 0$$

$${}_2h_3^3 = M_2 \frac{3\sqrt{10}}{4} (y_0 y_1^2 + y_0 x_1^2)$$

y c) el potencial correspondiente a una distribución polarizada en seis puntos, que se trató en la sección anterior y cuyo potencial ${}_{6p}V_3$ está dado por:

$${}_{6p}V_3 = \frac{1}{r^4} [{}_{6p}g_3^3 \cos 3\lambda P_3^3]$$

donde

$${}_{6p}g_3^3 = M_3 \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

Por esto resulta difícil encontrar en la naturaleza una distribución de carga cuyo potencial corresponda al valor numérico V_3 , ya que para que V_3 representara al fenómeno físico que se está midiendo, se tendría que depurar su valor, buscando la forma de estimar los potenciales ${}_1V_3$, ${}_2V_3$ y ${}_{op}V_3$ para restarlos de V_3 y obtener así el término invariante del potencial del multipolo de orden tres definido, como es bien sabido, por una distribución de ocho cargas colocadas en los vértices de un paralelepípedo y en el cual tres de sus aristas coinciden con los ejes de la distribución.

Hacer esta depuración parece ser ocioso si además se observa que el término V_3 puede corresponder a cuatro estructuras de paralelepípedos diferentes, debido a que la expresión $V_3 = \frac{1}{3!} \bar{u}_3 A_3 \bar{v}'_3 \bar{w}'_3$ no se altera si a dos de los vectores laterales se les multiplica por menos uno, y físicamente esto corresponde a cuatro paralelepípedos diferentes.

En el caso del cuadripolo tratado en el párrafo anterior sucede algo similar, el valor del término $V_2 = \frac{1}{2!} \bar{u}_2 A_2 \bar{v}'_2$ corresponde a dos posibles estructuras, se escogió la del párrafo porque uno de los ejes, por ejemplo el \overline{OH}_1 , tiene aproximadamente la misma dirección y movimiento que \overline{OC} como puede verse en la Tabla XII, donde λ_1 es el coseno director de \overline{OH}_1 y λ es una coordenada esférica del centro C.

Ante la imposibilidad de seleccionar la parte invariante de V_3 , no hay otro recurso que tomar su valor como está dado en la ecuación de Gauss con centro de referencia en C, con los valores g_3^1 h_3^1 que de todas maneras algún indicio pueden dar sobre las anomalías que distorsionan al campo. Estas anomalías en dimensión continental se encuentran muy claras en la carta de Intensidad Vertical para 1965 ya mencionada y son la inflexión del ecuador geomagnético que está localizada entre la parte central de Sudamérica y Sierra Leona en la costa occidental de Africa, y la existencia de regiones de intensidad máxima localizadas en la parte central de Canadá y el noreste de Asia, Olenék.

Una explicación de la existencia de dos regiones de máxima intensidad vertical en lugar de una, como era de esperarse y que en ésta estuviera contenido el punto definido como polo en la carta, se puede obtener indirectamente observando la gráfica del Sol. En efecto, ahí se ve que las regiones de flujo de vector magnético no tienen geometría regular sobre la superficie entonces las dos regiones de máximo pueden ser subregiones de toda una fície del astro, lo cual es muy probable que ocurra en el caso terrestre, y

región de flujo del mismo signo, y por lo tanto el punto que definiría al polo como una resultante estará aproximadamente dentro de un arco máximo que une los centros de estas dos regiones de máxima intensidad.

TABLA XII

Epoca	λ_1	λ
1835	178°19'	188°22'
1845	177°35'	181°12'
1885	168°10'	168°35'
1922	161°14'	161°19'
1945	158°14'	156°30'
1955	153°48'	150°49'
1960	152°43'	149°55'
1965	152°05'	148°42'
1970	153°28'	147°47'
1975	151°52'	148°18'

Observaciones relevantes

Si se analiza en a la ecuación (6) que se puede escribir en la forma:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \left\{ \frac{\partial^n f}{\partial z^k \partial y^l \partial x^l} ; \{\bar{u}_l\} \right\}$$

donde $i + j + k = n$, $\bar{u}_l = (u_{lx}, u_{ly}, u_{lz})$ y si $l = 0$, $u_0 = \text{cte.}$, el término de derivadas de orden n a partir de $n=3$, muy probablemente este término contiene términos de potenciales de multipolos matemáticos de orden inferior a n , así como la parte invariante del potencial del multipolo de orden n , que, como ya es sabido, corresponde a una distribución de cargas $-q$, $+q$, $-q$, ... localizadas en cada uno de los vértices de un simplejo de dimensión n , el cual tiene 2^n vértices y n ejes que son las aristas que salen de uno de los vértices que contenga carga $-q$.

Con esto se ve que el potencial dado por la ecuación (1) no es un desarrollo en series, sino una suma de series que corresponden a los potenciales de multipolos, en que la parte invariante es el primer término del potencial correspondiente. Por esto, no se encuentra una forma para establecer la convergencia en la sucesión de los valores medios cuadráticos, tomados sobre la superficie del planeta; en el sistema de referencia con origen en 0 estos valores son, para la época 1965:

$$\{V_n\}, n = 1, 2, \dots, 8$$

$$|V_n| = 1787, 191, 110, 50, 17, 8, 3, 1.$$

una unidad = 10^{-4} oersteds.

Si se quitara del planeta el flujo de líneas que salen de la polarización en el dipolo, posteriormente se quitara el flujo de las correspondientes en la polarización del cuadripolo y así se continuara, se ve que se enrarecería la distribución de puntos de los cuales fluyen líneas del campo magnético, por lo cual se ve que la sucesión también se va empequeñeciendo. Puede llegar un momento en que para cierta n , la existencia de multipolos ya no se detecte y los términos para la n de este orden en adelante sólo correspondan a potenciales de multipolos matemáticos, esto puede ocurrir a partir de n no muy grande. Burdamente es lo que se hace cuando se toma como potencial geomagnético el valor:

$$V = \frac{1}{r^2} [g_1^0 P_1^0 + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \sin \lambda) P_1^1]$$

AGRADECIMIENTOS

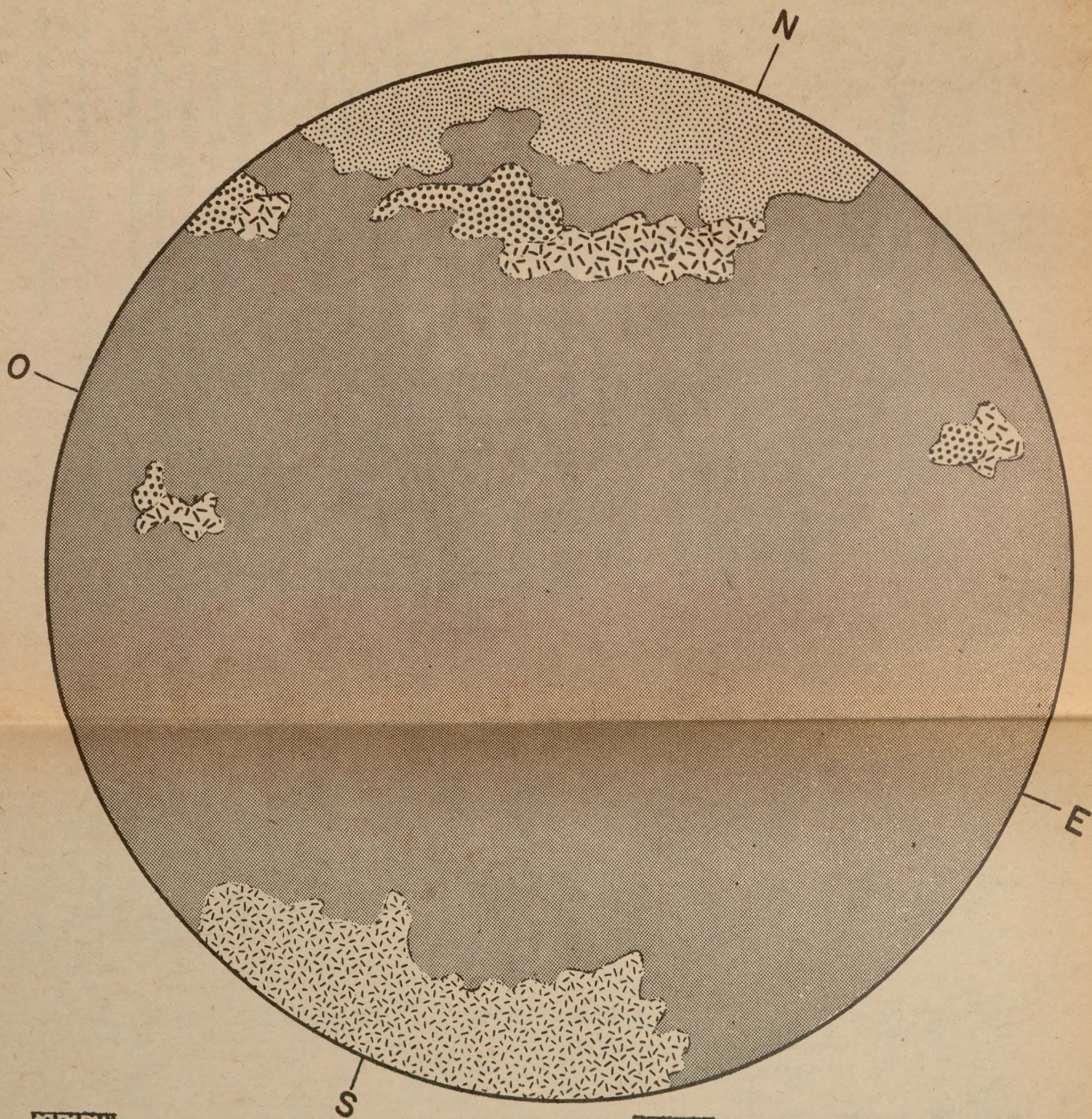
Los autores agradecen al Ing. Lauro Ramírez su contribución, por elaborar las gráficas del presente trabajo; a la señorita Nydia Figueroa M., por mecanografiar el manuscrito; a la señora Thelma del Cid por la corrección del mismo.

BIBLIOGRAFÍA

- BARRACLOUGH, D. R., J. M. HARWOOD, B. R. LEATON and S. R. C. MALIN, 1975. A model of the Geomagnetic field Epoch 1975. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* (43), p. 645-659.
- BARTELS, J., 1936. The eccentric dipole approximating the earth's magnetic field. *Terr. Mag.* Vol. 41(3), p. 248.
- CHARGOY, A., 1960. Substituciones de distribuciones. Una aplicación de las series de Taylor. *An. Inst. Geofis.*, UNAM, vol. 6, p. 29.
- CHARGOY, A. y M. G. de ÁLVAREZ, 1957. Análisis de los modelos que describen el campo magnético terrestre hasta 1955. *An. Inst. Geofis.*, UNAM, vol. 3, p. 137-156.
- G. de ÁLVAREZ, M., 1971. Multipolos magnéticos excéntricos. Modelos para 1950. *An. Inst. Geofis.*, UNAM, vol. 17, p. 51-70.
- LIVINGSTON, W. C., 1966. Magnetic fields on the Quiet Sun. *Scient. Amer.*, 215 (5): p. 54-62.

GRAFICA DEL DISCO SOLAR

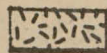
Tomada de una fotografía en Noviembre 1964 por el Observatorio Nacional Kitt Peak, Arizona, E. U.



Polaridad negativa de mayor intensidad



Polaridad negativa de intensidad media



Polaridad positiva de mayor intensidad



Polaridad positiva de intensidad media



Campo no polarizado que cubre el resto del disco