

ESTUDIO DINAMICO DE LOS EFECTOS SISMICOS EN  
LAS ESTRUCTURAS RETICULARES\*

por

Julián Adem \*\*

## RESUMEN

*Using reasonable simplifying assumptions, a building frame is considered as a vibratory system with a finite number of degrees of freedom (one for each floor).*

*For a building frame of  $n$  floors, the following results are obtained:*

*The frequency equation is*

$$| a_{ij} M_j \omega^2 - \delta_{ij} | = 0$$

---

\* Parte de este trabajo se ha basado en la tesis que para obtener el título de Ingeniero Civil presentó el autor en la Escuela Nacional de Ingenieros de la UNAM, en el año de 1948.

\*\* Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional Autónoma de México e Instituto Nacional de la Investigación Científica.

where  $| a_{ij} M_j \omega^2 - \delta_{ij} |$  is a determinant of order  $n$ ,  $a_{ij}$  is the displacement in the  $i$ -floor due to a unitary lateral force applied in the  $j$ -floor;  $M_j$  is the mass concentrated in the  $j$ -floor;  $\delta_{ij} = 1$  when  $i = j$  and  $\delta_{ij} = 0$  when  $i \neq j$ .

This frequency equation yield  $n$  positive real roots for  $\omega$ , which correspond to  $n$  natural periods of vibration of the building frame that can be computed by the formula  $t_0 = 2\pi/\omega$ .

The equations of the motion of the building frame due to a lateral displacement  $U_s$  at the ground are

$$U_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} M_j \ddot{U}_j = U_s \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

where  $U_i$  is the lateral displacement of the  $i$ -floor.

The general solution to this system of equations is given and applied to the case of a five-floor building.

The function that defines the motion at the ground is chosen as  $U_s = K \sin Ft$ . To define this function it is enough to know the seismic period and the maximum acceleration of the motion at the ground.

The seismic period ( $t_s = 2\pi/F$ ) is considered for different values, within a given range ( $1 \text{ sec.} \leq t_s \leq 3 \text{ sec.}$ ); the maximum acceleration,  $A_m = KF^2$  is taken as  $35 \text{ cm/sec}^2$ ; however, since the result is a linear function of  $A_m$ , we can also vary the parameter  $A_m$  in the solution and easily get the corresponding solutions.

When we vary  $A_m$ , say that we take maximum acceleration in the ground equal to  $cA_m$ , where  $c$  is a constant, the corresponding solution is obtained simply multiplying by  $c$  the one corresponding to  $A_m$ .

For the case of the five-floor frame considered, the following five values of natural periods of vibration are obtained: 0.64 sec., 0.24 sec., 0.15 sec., 0.10 sec. and 0.07 sec. The only terms of importance in the solution are two: the forced vibration term, of period equal to the seismic one, and the term of free vibration, corresponding to the fundamental period (0.64 sec.). This implies that the building frame vibrates without nodes.

If in the results we vary the seismic period, keeping the maximum acceleration in the ground fixed, we obtain the following conclusions: For a high period (say,  $t_0 = 3$  sec.), the building frame behaves practically as rigid, with an acceleration at the different floors almost equal to the seismic one; however, as the seismic period is taken smaller (say 1 sec) and approaches the fundamental natural period of vibration of the frame, the maximum acceleration applied in the different floors is higher than the one in the ground and varies almost linearly with the height of the building frame. For example, for  $t_s = 1$  sec., the maximum acceleration in the last floor (fifth one) is  $3.4 A_m$ . It follows that for a certain type of frames a trapezoidal distribution of lateral loads is apparently a good approximation to be used in an approximate static method to compute the effect of earthquakes. However, the maximum acceleration to be applied at the top floor should be determined from a dynamic analysis, since it depends on the values of the natural periods of vibration of the frame, as well as on the seismic period and on other parameters, as shown by these computations.

To determine if the above conclusion is correct and at the same time obtain the value of the load to be used in a static method, it is necessary to carry on the computations by a dynamic method of different building frames. This task can be undertaken in a practical way by the use of electronic computers.

A second line of extension of this work is to undertake a systematic study of seismograms and accelerograms in order to determine the best function to be used as representative of the motion at the ground.

## I. INTRODUCCION

El cálculo del efecto sísmico en las estructuras es un problema fundamental de la ingeniería civil que hasta la fecha no ha sido satisfactoriamente resuelto.

El problema es de tal complejidad que algunos ingenieros han aban-

donado la esperanza de obtener una solución basada en los métodos clásicos de la Teoría de Vibraciones. La complejidad del problema se debe a que el dato del movimiento sísmico es muy indeterminado y, además, el cálculo de las vibraciones de la estructura es bastante complicado.

Debido a la aparente intratabilidad del problema, se ha optado por la solución más simple y se considera, generalmente, el efecto del temblor reemplazado por fuerzas laterales estáticas, concentradas en los pisos de la estructura. Esta solución es demasiado simplificada puesto que en ella no intervienen, ni siquiera en forma tosca, los elementos principales de un problema vibratorio. En realidad, dicho método presupone un análisis dinámico de las estructuras que dé la información respecto a la intensidad de las fuerzas estáticas que deben usarse.

Siendo el problema de la vibración de las estructuras por efecto de un temblor muy complejo, su solución teórica debe orientarse hacia el uso de modelos simplificados que contengan los mecanismos principales que intervienen en el fenómeno vibratorio.

El objeto de este trabajo es desarrollar y aplicar una teoría para calcular el efecto de movimientos vibratorios laterales de estructuras reticulares, basada en los métodos de la Dinámica y utilizando, al mismo tiempo, los métodos de cálculo actualmente empleados para determinar momentos flexionantes, los métodos de distribución de momentos de Cross. Dicha teoría va a basarse en ciertas simplificaciones que reducen el número de grados de libertad del sistema (un grado por cada piso o nivel), reduciendo las ecuaciones que definen el movimiento de la estructura a formas sencillas que, por su aplicabilidad, ponen al alcance del ingeniero el tratamiento dinámico de esta clase de problemas vibratorios que, bajo hipótesis sumamente fuertes, se acostumbra tratar como problemas estáticos.

## II. VIBRACION LIBRE

Se va a hacer el estudio sobre la retícula de tres pisos, mostrada en

la Figura 1 (a), pero los razonamientos son generales y se pueden aplicar a una estructura de  $n$  pisos. En la Sección IX se dá la generalización de los resultados.

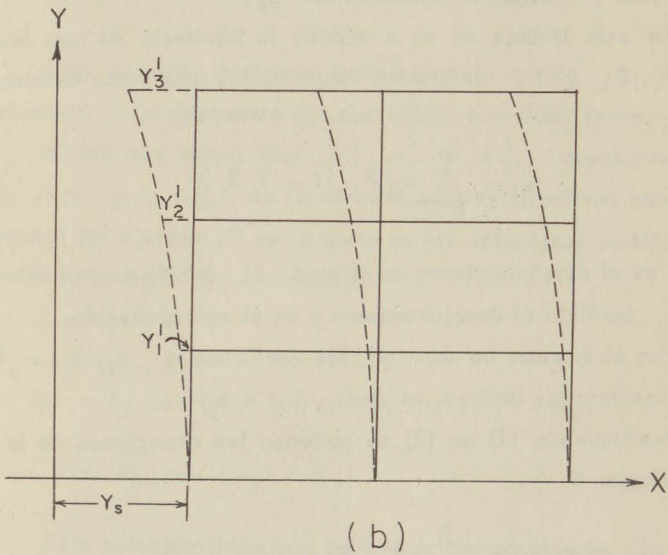
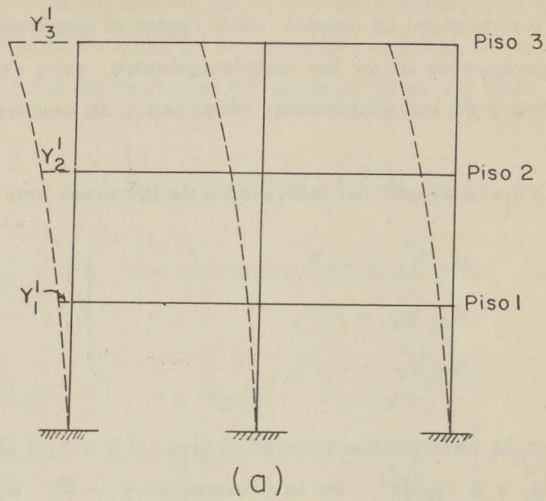


Fig. 1

Sea la retícula de la Figura 1 (a) en posición desequilibrada y libre de fuerzas exteriores. Consideremos que inicialmente los pisos 1, 2 y 3 tienen los pequeños desplazamientos laterales  $U_1'$ ,  $U_2'$  y  $U_3'$  respecto a su posición de equilibrio.

La estructura se moverá hasta lograr el equilibrio en virtud de fuerzas de *sentido opuesto* al de los desplazamientos, cuyo valor depende de los desplazamientos y de las propiedades elásticas y de amortiguamiento de la estructura.

Las ecuaciones del movimiento de los pisos son

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{U}_1' &= -F_1 \\ M_2 \ddot{U}_2' &= -F_2 \\ M_3 \ddot{U}_3' &= -F_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

donde  $M_i$  es la masa concentrada en el piso  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $U_i'$  es el desplazamiento,  $\ddot{U}_i' = d^2 U_i' / dt^2$  es la aceleración y  $-F_i$  es la resultante de las fuerzas en el piso  $i$  según la dirección de  $U_i'$ .

En este trabajo se va a admitir la hipótesis de que las fuerzas elásticas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  se pueden valorar de las relaciones estáticas

$$U_i' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} F_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

donde  $a_{ij}$  es el desplazamiento en el piso  $i$ , debido a una fuerza unitaria, en el piso  $j$ , paralela al desplazamiento y en el mismo sentido.

Por el teorema de Maxwell, los coeficientes  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) son simétricos respecto a los índices, es decir,  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Sustituyendo (1) en (2) se obtienen las ecuaciones de la vibración libre de la retícula:

$$-U_i' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} M_j \ddot{U}_j' \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

Para establecer estas ecuaciones, además de aceptar la validez de las relaciones (2), se han hecho las siguientes hipótesis:

1.- Se despreciaron fuerzas de amortiguamiento.

2.- Se consideró que las partículas de un mismo piso sufren el mismo desplazamiento, estando la masa de la estructura concentrada en los pisos.

Una solución particular del sistema (3) es del tipo

$$y_i' = A_i \cos(\omega t + B_i)$$

donde  $A_1, A_2, A_3$  y  $B_i$  son constantes arbitrarias y  $\omega$  se obtiene de la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_{11} M_1 \omega^2 - 1 & a_{12} M_2 \omega^2 & a_{13} M_3 \omega^2 \\ a_{21} M_1 \omega^2 & a_{22} M_2 \omega^2 - 1 & a_{23} M_3 \omega^2 \\ a_{31} M_1 \omega^2 & a_{32} M_2 \omega^2 & a_{33} M_3 \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Esta ecuación de tercer grado respecto a  $\omega^2$  se llama ecuación de la frecuencia. Se *demuestra* que sus raíces son todas reales y positivas.

Si las tres raíces son  $\omega_1^2, \omega_2^2$  y  $\omega_3^2$ , cuyas raíces cuadradas positivas  $\omega_1, \omega_2$  y  $\omega_3$ , se llaman frecuencias circulares naturales, la solución general del sistema (3) es la suma de las soluciones particulares correspondientes a cada una de las frecuencias.

La solución es:

$$y_i' = A_i \cos(\omega_1 t + B_i) + A_i' \cos(\omega_2 t + B_2) + \\ + A_i'' \cos(\omega_3 t + B_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Esta solución tiene que satisfacer las ecuaciones (3), por lo tanto,

tiene que satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$A_i = a_{i1} M_1 \omega_1^2 A_1 + a_{i2} M_2 \omega_1^2 A_2 + a_{i3} M_3 \omega_1^2 A_3 \quad (i=1,2,3) \quad (5)$$

para la solución particular que corresponde a  $\omega_1$ .

Este sistema homogéneo lineal liga a  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ , de tal modo que, tan pronto se conoce una de ellas, las otras quedan determinadas, es decir, sólo una amplitud es arbitraria en la solución particular correspondiente a la frecuencia circular  $\omega_1$ .

Análogas ecuaciones a las (5) deben satisfacerse para  $\omega_2$  y  $\omega_3$ , por lo tanto, las constantes arbitrarias quedan reducidas a tres amplitudes y tres fases: como la solución tiene las constantes arbitrarias que se requieren para ello, es una solución general.

Por cada frecuencia natural hay una amplitud arbitraria solamente, es decir, hay una forma de la elástica al vibrar, a la más baja, llamada fundamental, corresponde una forma en la cual no hay nodos. Las otras dos forman de vibrar, en este caso, tienen una 1 nodo y la otra 2.

### III. PERIODOS NATURALES DE VIBRACION

Especial estudio merecen las raíces de la ecuación (4). Ya se han definido como frecuencias naturales circulares, su valor depende de los coeficientes elásticos  $a_{ij}$  y de las masas del sistema ( $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$ ).

Los períodos naturales se obtienen mediante la ecuación

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

y las frecuencias naturales están dadas por

$$f = \frac{1}{t_0}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia circular natural en radianes/seg.,  $t_0$  es el período natural en segundos y  $f$  es la frecuencia natural en ciclos/seg.

#### IV. ECUACIONES DE LA VIBRACION SISMICA

Vamos a tomar en cuenta el temblor como un movimiento lateral que sufre toda la estructura junto con el suelo, estando dicho movimiento definido en el suelo por  $U_s$ .

La estructura efectuará dos movimientos: una translación general igual a  $U_s$  y un movimiento particular de cada piso ( $U'_1, U'_2$  y  $U'_3$ ) Figura 1 (b). El desplazamiento total en cada piso será

$$U_i = U'_i + U_s \quad (i = 1, 2, 3)$$

Las ecuaciones del movimiento en este caso son

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{U}_1 &= -F_1 \\ M_2 \ddot{U}_2 &= -F_2 \\ M_3 \ddot{U}_3 &= -F_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

donde  $F_1, F_2$  y  $F_3$  satisfacen las relaciones (2).

Sustituyendo (6) en (2) se obtiene:

$$U_i + \sum_{j=1}^3 a_{ij} M_j \ddot{U}_j = U_s \quad (7)$$

que son las ecuaciones que definen el movimiento de la estructura sujeta al desplazamiento sísmico  $U_s$  en el suelo.

## V. SELECCION DE LA FUNCION QUE DEFINE EL TEMBLOR

Se tienen los siguientes datos:

1) Aceleración máxima del temblor de máxima intensidad registrado en la región, sea  $A_m$ .

2) De datos estadísticos se obtienen los límites entre los cuales varían los valores de los períodos de los temblores:

$$t_1 \leq t_s \leq t_2$$

donde  $t_s$  es el período sísmico y  $t_1$  y  $t_2$  sus valores extremos.

Estos datos son suficientes para nuestro estudio.

Se sabe que la función real que define al temblor tiene amplitud y frecuencia variables, no habiendo ninguna ley de variación conocida; por lo tanto, por ahora es inútil tratar de hacer intervenir el temblor como una función con frecuencia, amplitudes y tiempos de duración fijos. Lo que parece ser razonable es hacer el análisis para todos los períodos posibles entre  $t_1$  y  $t_2$  y para el temblor cuya aceleración máxima es  $A_m$ , y de ese análisis tomar los resultados más desfavorables.

Lo que verdaderamente interesa para nuestro estudio es la intervención de los datos frecuencia y aceleración máxima, sin tener importancia la forma de la función periódica escogida; por lo tanto, se justifica que arbitrariamente definamos el movimiento sísmico con la función  $K \text{ sen } Ft$ , estando ligadas la frecuencia y la amplitud con la aceleración mediante la ecuación  $KF^2 = A_m$ .

Como  $A_m = KF^2$ , si se conoce una solución para un valor  $A_m = B$ , considerando  $F$  fijo, entonces la solución para  $A_m = CB$  se obtiene multiplicando la solución conocida por el factor  $C$ . Este resultado es consecuencia de que, al sustituir  $\psi_s = K \text{ sen } Ft$  en las ecuaciones (7), entonces  $K$  aparece en el segundo miembro de dichas ecuaciones y su solución, por lo tanto, también contiene  $K$  a la primera potencia como factor.

El estudio general para todos los períodos posibles, que permite la discusión y comparación de resultados, se consigue denominando con literales K y F las amplitudes y frecuencias durante todas las etapas del cálculo y sustituyendo los valores particulares de K y F en los resultados finales y escogiendo como datos de proyecto los resultados más desfavorables.

Un análisis más general consiste en desarrollar en una serie de Fourier la función que define el temblor y tomar varios términos del desarrollo en serie para el cálculo. En nuestro caso hemos tomado únicamente un término de dicho desarrollo.

La justificación en la selección de la función tan simplificada  $\psi_s = K \text{ sen Ft}$  como dato es el hecho de que en este primer trabajo deben incorporarse en el estudio los elementos básicos del problema, pero conservando la mayor simplicidad. Los refinamientos del método, si es que se requieren, deben ser motivo de trabajos posteriores y se justificarán siempre y cuando los resultados numéricos y las conclusiones de este estudio lo ameriten.

## VI. SOLUCION DE LAS ECUACIONES

Sustituyendo  $\psi_s = K \text{ sen Ft}$  en las ecuaciones (7) obtenemos

$$\psi_i + \sum_{j=1}^3 a_{ij} M_j \ddot{\psi}_j = K \text{ sen Ft} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8)$$

Las soluciones de estas ecuaciones son las soluciones de las ecuaciones de vibración libre más un término del tipo  $R_i \text{ sen Ft}$  donde  $R_i$  se determina de las ecuaciones derivadas de (8) sustituyendo  $\psi_i = R_i \text{ sen Ft}$  y cancelando  $\text{sen Ft}$ , dichas ecuaciones son un sistema simultáneo lineal que da los valores  $R_1, R_2$  y  $R_3$ .

El sistema es el siguiente:

$$R_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} M_j R_j F^2 = K \quad (i = 1, 2, 3)$$

y las soluciones son:

$$R_1 = \frac{\begin{vmatrix} -K & a_{12} M_2 F^2 & a_{13} M_3 F^2 \\ -K & a_{22} M_2 F^2 - 1 & a_{23} M_3 F^2 \\ -K & a_{32} M_2 F^2 & a_{33} M_3 F^2 - 1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$R_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} M_1 F^2 - 1 & -K & a_{13} M_3 F^2 \\ a_{21} M_1 F^2 & -K & a_{23} M_3 F^2 \\ a_{31} M_1 F^2 & -K & a_{33} M_3 F^2 - 1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$R_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} M_1 F^2 - 1 & a_{12} M_2 F^2 & -K \\ a_{21} M_1 F^2 & a_{22} M_2 F^2 - 1 - K \\ a_{31} M_1 F^2 & a_{32} M_2 F^2 & -K \end{vmatrix}}{\Delta}$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} M_1 F^2 - 1 & a_{12} M_2 F^2 & a_{13} M_3 F^2 \\ a_{21} M_1 F^2 & a_{22} M_2 F^2 - 1 & a_{23} M_3 F^2 \\ a_{31} M_1 F^2 & a_{32} M_2 F^2 & a_{33} M_3 F^2 - 1 \end{vmatrix}$$

**Resonancia.**

Quando la frecuencia sísmica se acerca a una de las frecuencias

naturales,  $\Delta \rightarrow 0$  y  $R_1, R_2$  y  $R_3$  tienden a infinito, se dice, en tal caso, que hay resonancia.

**Determinación de las Constantes Arbitrarias.**

Inicialmente la estructura está en equilibrio, por lo tanto,

$$y_i' = \dot{y}_i' = 0 \quad (i = 1, 2, 3) ,$$

es decir,

$$y_i = y_s$$

$$\dot{y}_i = \dot{y}_s$$

Por consiguiente, la solución debe satisfacer las condiciones iniciales:

$$y_i = 0 , \quad \dot{y}_i = KF \quad \text{para} \quad t = 0$$

La solución de (8) es del tipo:

$$y_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + B_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + B_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + B_3) + R_1 \text{ sen } Kt$$

$$y_2 = C_1 A_1 \cos(\omega_1 t + B_1) + C_3 A_2 \cos(\omega_2 t + B_2) + C_5 A_3 \cos(\omega_3 t + B_3) + R_2 \text{ sen } Kt$$

$$y_3 = C_2 A_1 \cos(\omega_1 t + B_1) + C_4 A_2 \cos(\omega_2 t + B_2) + C_6 A_3 \cos(\omega_3 t + B_3) + R_3 \text{ sen } Kt$$

donde

$$C_1, C_2, C_3, C_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3, R_1, R_2, R_3 \text{ y } K$$

son conocidos, y se van a determinar

$$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 .$$

La condición

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0 \quad \text{para} \quad t = 0$$

dá el valor de las fases:  $B_1 = B_2 = B_3 = -\pi/2$ ; como  $\cos(\omega t - \pi/2) = \sin \omega t$  la solución va a ser suma de senos.

La segunda condición  $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dot{y}_3 = KF$  para  $t = 0$ , dá un sistema lineal de tres ecuaciones y tres incógnitas del cual se obtienen las amplitudes de las vibraciones libres.

## VII. DETERMINACION DE LAS CONSTANTES ELASTICAS

En lo anterior se han utilizado nueve constantes  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), las cuales llamaremos constantes elásticas, cuya definición ya se dió y cuya interpretación se vé con claridad en la Figura 2.

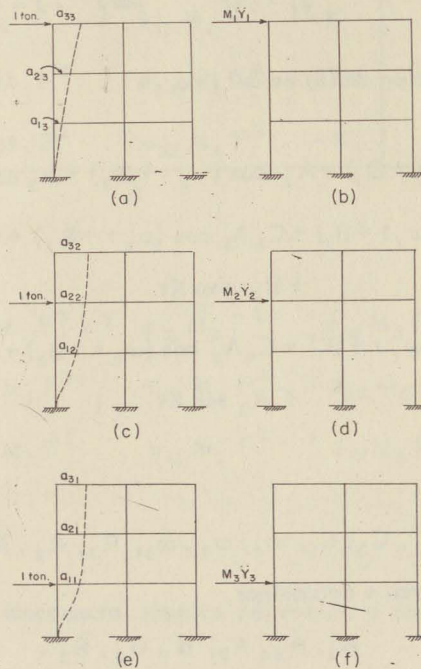


Fig. 2

Si en lugar de fuerzas unitarias se tienen fuerzas cualesquiera  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  quedan éstas relacionadas con sus desplazamientos por las ecuaciones

$$\psi_i' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} F_j$$

que son las mismas ecuaciones (2) empleadas anteriormente.

Para la determinación de las constantes elásticas es cómodo emplear el método llamado indirecto, que a continuación se describe:

Se supone un desplazamiento  $\Delta_1$  en el piso 1.

Por efecto de ese desplazamiento aparecen en los extremos de las columnas momentos  $M_1$ , Figura 3 (a). El valor de estos momentos se obtiene conociendo el de los desplazamientos y recíprocamente mediante la ecuación

$$\Delta_1 = \frac{M_1 L^2}{6 E I}$$

donde  $L$  es la longitud de las columnas,  $E$  es el módulo de elasticidad e  $I$  el momento de inercia de la sección de las columnas.

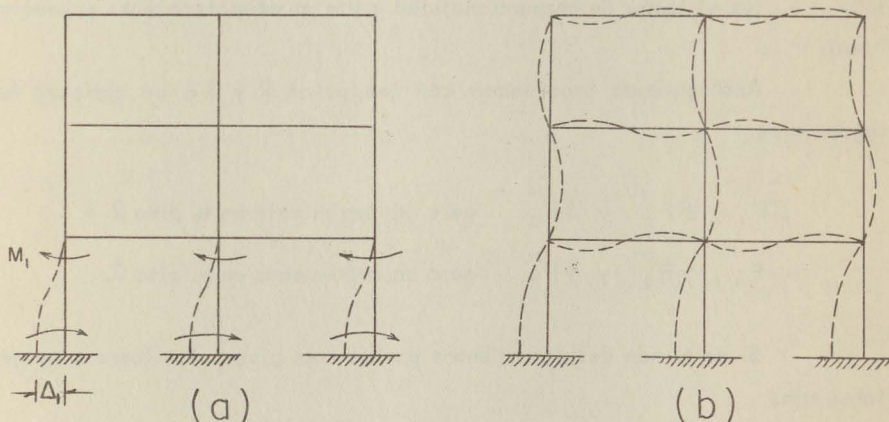


Fig. 3

Así pues, las columnas están ejerciendo sobre los nudos del piso 1 y sobre los empotramientos, momentos  $M_1$ , por lo tanto no están equilibrados los nudos del piso 1 y hay necesidad de equilibrarlos permitiéndoles movimientos angulares, Figura 3 (b).

Las deformaciones angulares de los nudos distribuyen el momento  $M_1$  proporcionalmente a las rigideces de las piezas en cada nudo del piso 1; los momentos que aparecen por efecto de esa distribución inducen, a su vez, en los otros extremos de las barras, momentos de transporte que, desequilibrados, hay que repartir; se transportan nuevos momentos y así sucesivamente hasta que no haya ningún momento desequilibrado. En resumen, se aplica el conocido método de Cross. Los momentos reales se obtienen permitiendo, primero, solamente corrimientos lineales al piso 1 y, después, permitiéndoles solamente movimientos angulares.

Del conocimiento de los momentos, fácilmente se pasa al de las fuerzas tangenciales en cada nivel aislando barras. Sumando las tangenciales en cada piso se tiene el tangencial total en cada piso. Sean estos  $F'_1$  en el piso 1,  $F'_2$  en el piso 2 y  $F'_3$  en el piso 3, los tangenciales reales serán:

$$\alpha F'_1, \alpha F'_2 \text{ y } \alpha F'_3$$

donde  $\alpha$  es el factor de proporcionalidad entre el desplazamiento supuesto y el real.

Análogamente procedemos con los pisos 2 y 3 y se obtienen los tangenciales

$$\beta F''_1, \beta F''_2 \text{ y } \beta F''_3 \quad \text{para un corrimiento en el piso 2 y}$$

$$\gamma F'''_1, \gamma F'''_2 \text{ y } \gamma F'''_3 \quad \text{para un corrimiento en el piso 3.}$$

Si se tienen desplazamientos en los tres pisos, las fuerzas tangenciales son:

$$\begin{array}{ll} \alpha F_1' + \beta F_1'' + \gamma F_1''' & \text{en el piso 1} \\ \alpha F_2' + \beta F_2'' + \gamma F_2''' & \text{en el piso 2 y} \\ \alpha F_3' + \beta F_3'' + \gamma F_3''' & \text{en el piso 3.} \end{array}$$

Igualando esas fuerzas tangenciales deducidas con las fuerzas reales se obtiene el valor de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .

Para la condición de carga de la Figura 2 (a) se tiene el sistema de ecuaciones (9).

$$\begin{array}{l} \alpha F_1' + \beta F_1'' + \gamma F_1''' = 1 \\ \alpha F_2' + \beta F_2'' + \gamma F_2''' = 1 \\ \alpha F_3' + \beta F_3'' + \gamma F_3''' = 1 \end{array} \quad (9)$$

Para la condición de carga de la Figura 2 (c) se tiene el sistema de ecuaciones (10).

$$\begin{array}{l} \alpha F_1' + \beta F_1'' + \gamma F_1''' = 1 \\ \alpha F_1' + \beta F_2'' + \gamma F_2''' = 1 \\ \alpha F_1' + \beta F_3'' + \gamma F_3''' = 0 \end{array} \quad (10)$$

Finalmente, para la condición de la Figura 2 (e) se tiene el sistema de ecuaciones (11).

$$\begin{array}{l} \alpha F_1' + \beta F_1'' + \gamma F_1''' = 1 \\ \alpha F_2' + \beta F_2'' + \gamma F_2''' = 0 \\ \alpha F_3' + \beta F_3'' + \gamma F_3''' = 0 \end{array} \quad (11)$$

Las soluciones de los tres sistemas de ecuaciones (9), (10) y (11) son los factores por los que hay que multiplicar  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$  para obtener los desplazamientos parciales reales; acumulando los parciales se obtienen las constantes elásticas.

Por ejemplo, si  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  y  $\gamma_1$  son las soluciones del sistema (9),  $\alpha_1 \Delta_1$ ,  $\beta_1 \Delta_2$  y  $\gamma_1 \Delta_3$  son los desplazamientos parciales reales y

$$a_{13} = \alpha_1 \Delta_1 ,$$

$$a_{23} = \alpha_1 \Delta_1 + \beta_1 \Delta_2 ,$$

$$a_{33} = \alpha_1 \Delta_1 + \beta_1 \Delta_2 + \gamma_1 \Delta_3 \quad .$$

### VIII. DATOS DE DISEÑO QUE SE OBTIENEN

Del análisis se van a obtener dos datos que son suficientes para el cálculo de las barras por efecto de la vibración lateral.

Estos datos son:

- 1) Períodos naturales.
- 2) Aceleración en cada piso.

La determinación de los períodos naturales, que no es sino una etapa de la determinación de aceleraciones, descarta la posibilidad de resonancia.

La determinación de las aceleraciones máximas en los pisos permite el conocimiento de los momentos flexionantes para proyecto, pues se tiene una distribución de momentos para la condición de carga de la Figura 2 (a). Si los momentos de esa distribución se multiplican por  $M_1 \ddot{y}_1$  (donde  $M_1$  masa en el nivel 1 y  $\ddot{y}_1$  aceleración en el mismo nivel) se obtiene una distribución de momentos para la condición de carga de la Figura 2 (b).

Análogamente se tienen distribuciones para las condiciones de carga de las Figuras 2 (c) y 2 (e) y se obtienen para las condiciones de las Figuras

2 (d) y 2 (f).

Los momentos finales se obtienen por suma de los tres momentos en cada barra correspondientes a las tres condiciones de carga 2 (b), 2 (d) y 2 (f) que hay que superponer para obtener la condición real.

## IX. VIBRACION DE UNA ESTRUCTURA DE N PISOS

Con un procedimiento enteramente análogo al utilizado para el caso ya tratado, de una estructura de tres pisos, se puede obtener la generalización de los resultados anteriores para el caso de una estructura de  $n$  pisos.

Los resultados se dan a continuación.

La ecuación de la frecuencia es

$$| a_{ij} M_j \omega^2 - \delta_{ij} | = 0 \quad (12)$$

donde  $| a_{ij} M_j \omega^2 - \delta_{ij} |$  es un determinante de orden  $n$ ,  $a_{ij}$  es el desplazamiento en el piso  $i$  debido a una fuerza unitaria aplicada en el piso  $j$ ;  $M_j$  es la masa concentrada en el piso  $j$ ;  $\delta_{ij} = 1$  cuando  $i = j$  y  $\delta_{ij} = 0$  cuando  $i \neq j$ .

La ecuación (12), que es de grado  $n$  respecto a  $\omega^2$ , tiene  $n$  raíces reales positivas que dan  $n$  períodos naturales y  $n$  modos de vibración natural de la estructura.

Las ecuaciones del movimiento de la estructura, debido a un desplazamiento  $y_s$  en el suelo, son:

$$y_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} M_j \ddot{y}_j = y_s \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

La solución a estas ecuaciones se obtiene por un procedimiento, análogo al usado para el caso  $n = 3$ , y se ilustrará a continuación con un ejemplo numérico para una estructura de cinco pisos.

## X. EJEMPLO NUMERICO

### 1. Datos

#### *Datos de la estructura.*

Retícula mostrada en la Figura 4. En cada nivel hay un peso total de 30 toneladas. Módulo de elasticidad:  $E = 175,000 \text{ Kg/cm}^2$ .

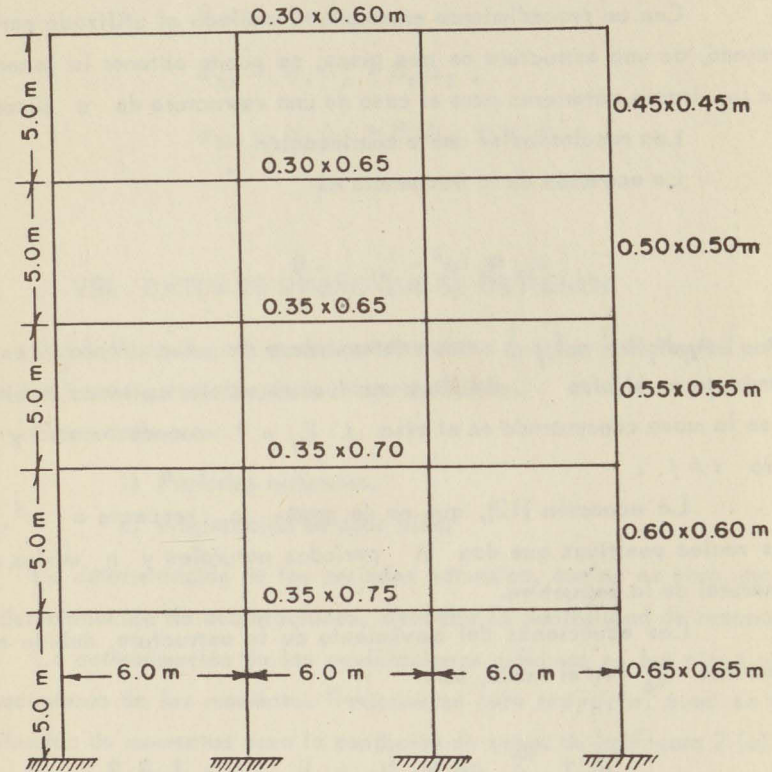


Fig. 4

#### *Datos de temblor.*

Aceleración máxima:  $A_m = .35 \text{ m/seg}^2$ .

Período:  $1 \text{ seg} \leq t_s \leq 3 \text{ seg.}$

Escogemos  $y_s = K \text{ sen Ft}$  entonces  $KF^2 = .35 \text{ m/seg}^2$ .

$t_s = 2\pi/F$  ( $t_s = \text{período}$ ) y

$f = 1/t_s$  ( $f = \text{frecuencia}$ ).

Conviene tabular los datos en la forma siguiente:

$t_s$	F	f	K	F <sup>2</sup>
1	6.2832	1	.00886	39.47860
1.5				
2	3.1416	.5	.03546	9.86965
2.5				
3	2.0944	.333	.07979	4.38651

donde  $t_s$  en segundos, F en rad/seg, f en ciclos/seg y K en metros.

## 2. Determinación de las constantes elásticas.

Para no distraer la atención del lector del objeto fundamental del artículo, muchos resultados se dan sin los cálculos justificativos. Para una información completa sobre el método que debe seguirse consúltese "Apuntes de Estructuras de Concreto", por el Ing. Alberto J. Flores (Escuela Nacional de Ingenieros, U.N.A.M.).

### ETAPA I.

Para un desplazamiento supuesto  $\Delta_1 = 10,000 L^2/6EI$  en el piso 1 (figura 5 [a]), que produce momentos de  $10,000 \text{ Kg.} \cdot \text{m}$ , que en los nudos del

piso 1 están desequilibrados, se obtiene el diagrama de momentos flexionantes mostrado en la Figura 5 (b), correspondiente al estado en que todos los nudos de la retícula están equilibrados, mediante el método de Cross.

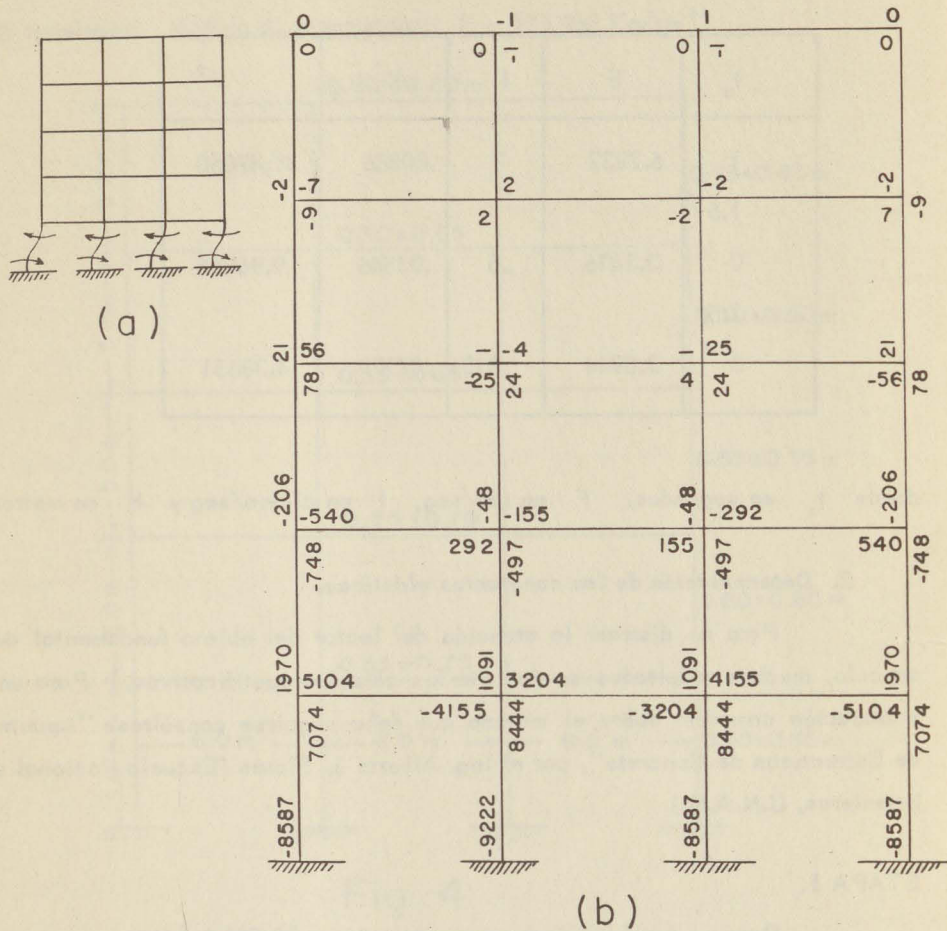


Fig. 5

ETAPA II.

Para un desplazamiento supuesto  $\Delta_2 = 10,000 L^2/6EI$  en el piso 2 (Figura 6 [a]), que produce momentos desequilibrados de 10,000 kg. -m, en los nudos de los pisos 1 y 2, se obtiene el diagrama de momentos flexionantes de la Figura 6 (b).

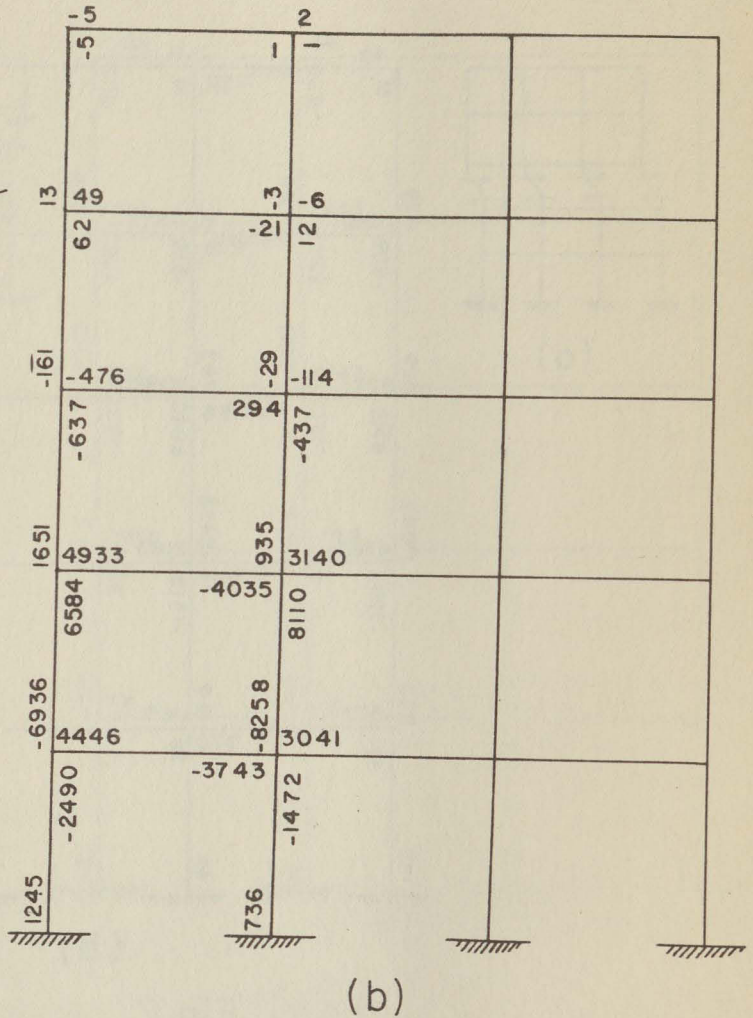
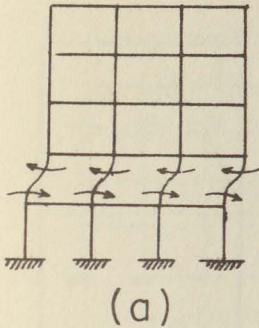


Fig. 6

ETAPA III.

Para un desplazamiento supuesto  $\Delta_3 = 10,000 L^2/6EI$  en el piso 3 (Figura 7 [a]), que produce momentos desequilibrados de 10,000 kg. -m; en los nudos de los pisos 2 y 3, se obtiene el diagrama de momentos flexionantes de la Figura 7 (b).

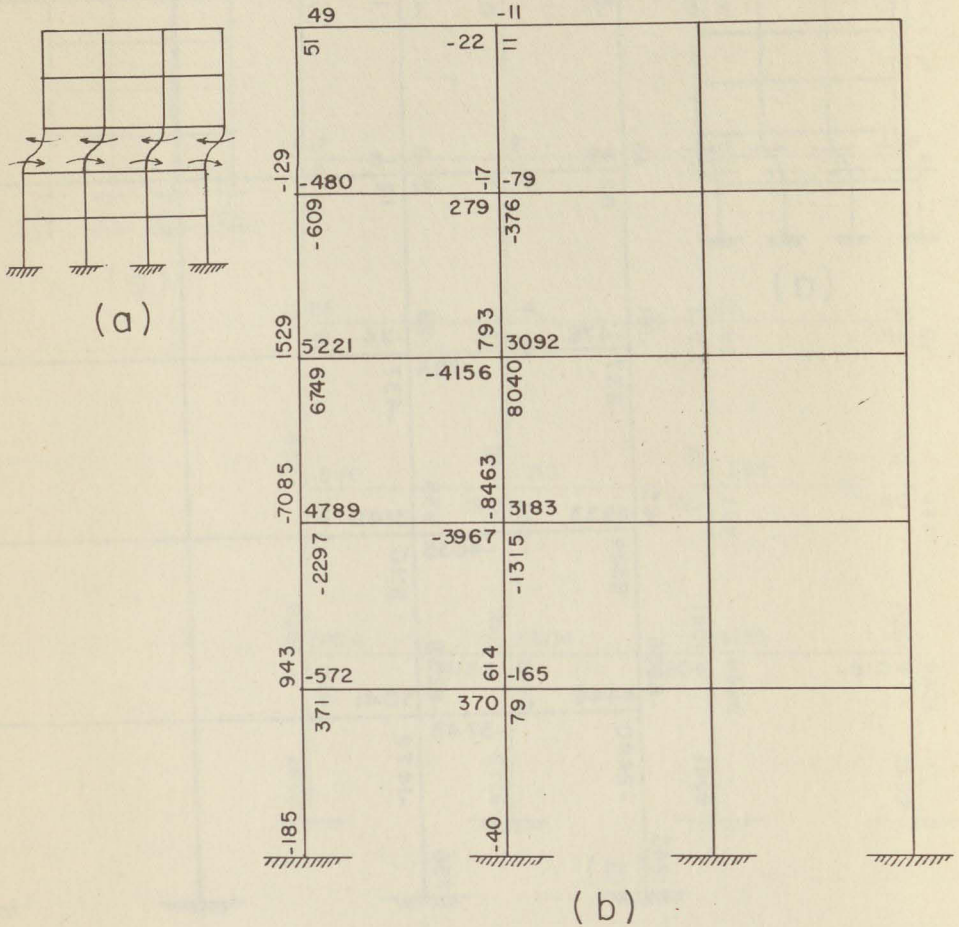
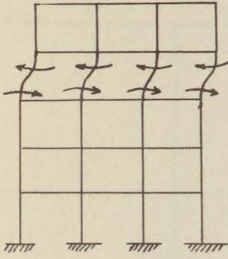


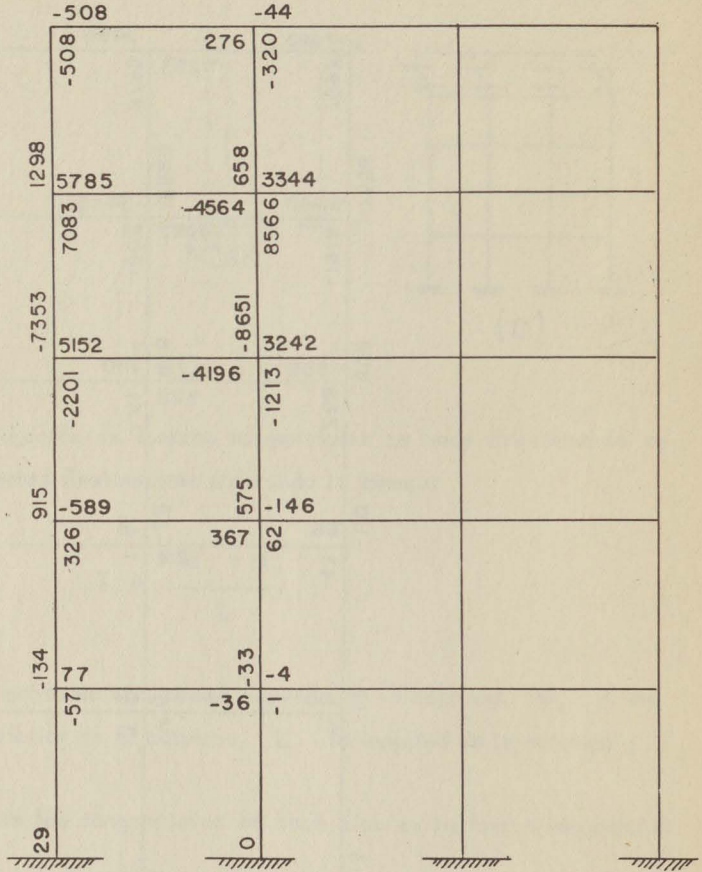
Fig.7

ETAPA IV.

Para un desplazamiento supuesto  $\Delta_4 = 10,000 L^2/6EI$  en el piso 4 (Figura 8 [a]), que produce momentos desequilibrados de 10,000 kg. -m, en los nudos de los pisos 3 y 4, se obtiene el diagrama de momentos flexionantes de la Figura 8 (b).



(a)



(b)

Fig. 8

ETAPA V.

Para un desplazamiento supuesto  $\Delta_5 = 10,000 L^2/6EI$  en el piso 5 (Figura 9 [a]), que produce momentos desequilibrados de 10,000 kg. -m., en los nudos de los pisos 4 y 5, se obtiene el diagrama de momentos flexionantes de la Figura 9 (b).

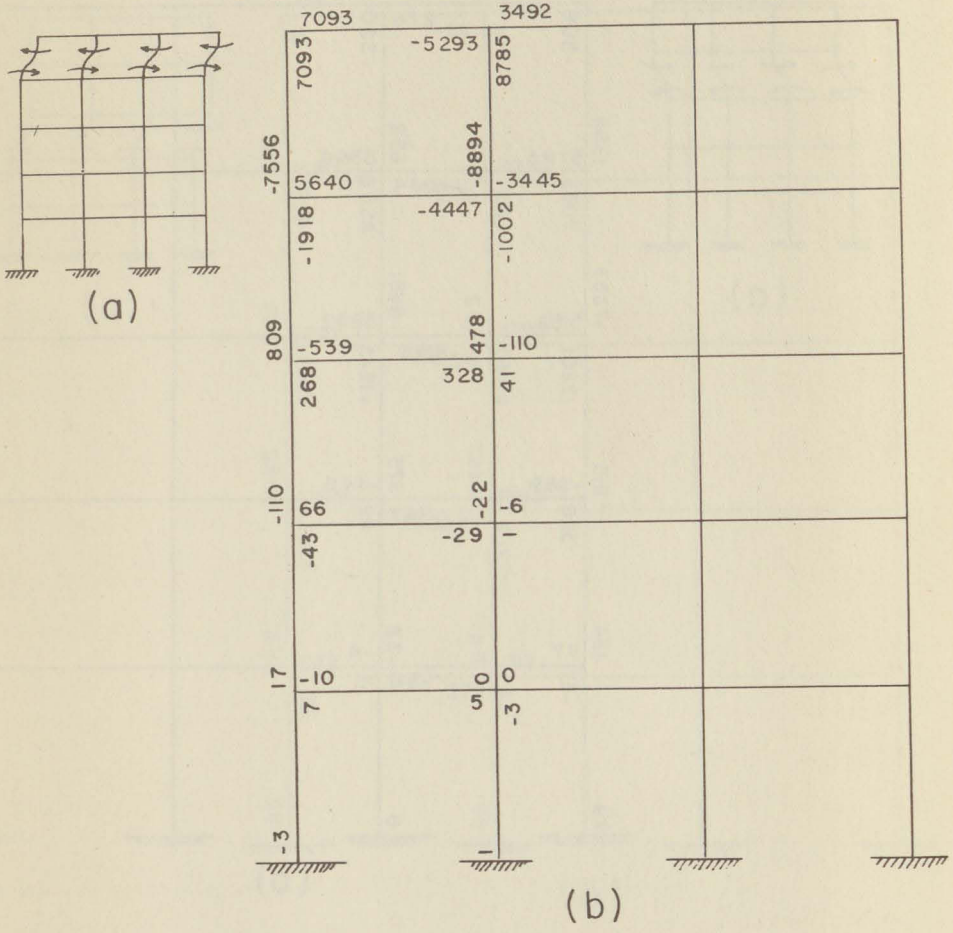


Fig. 9

## Determinación de Fuerzas Tangenciales (Figura 10)

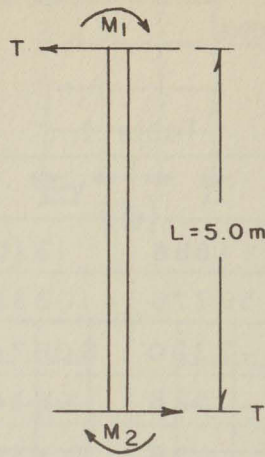


Fig. 10

La determinación de fuerzas tangenciales se hace directamente en los diagramas de momentos flexionantes aplicando la fórmula

$$T = \frac{M_1 + M_2}{L}$$

donde  $M_1$  es el momento en el extremo superior de la columna,  $M_2$  el momento en el extremo inferior de la columna,  $L$  la longitud de la columna y  $T$  la fuerza tangencial.

La suma de los tangenciales en cada piso es la fuerza tangencial total en cada piso.

Los valores dados en la Tabla 1 divididos por cinco son los valores de las fuerzas tangenciales.

Tabla I

Etapa Piso	I	II	III	IV	V
1	66654	-11886	1310	-170	10
2	-8612	59776	-10338	1110	-118
3	712	-7320	60674	-9808	882
4	-62	528	-6614	63306	-8414
5	2	-28	416	-5568	64656

*Ecuaciones Para Determinar los Factores de Proporcionalidad  
entre Desplazamientos Supuestos y Reales.*

Para la condición de carga de la Figura 11 (a) las ecuaciones son:

$$66664 A - 11886 B + 1310 C - 170 D + 10 E = 5000$$

$$-8612 A + 59776 B - 10338 C + 1110 D - 118 E = 5000$$

$$712 A - 7320 B + 60674 C - 9808 D + 882 E = 5000$$

$$-62 A + 528 B - 6614 C + 63306 D - 8414 E = 5000$$

$$2 A - 28 B + 416 C - 5568 D + 64656 E = 5000$$

Para las condiciones de las Figuras 11 (b), 11 (c), 11 (d) y 11 (e), lo único que es distinto son los segundos miembros; para 11 (b) los segundos miembros son 5000, 5000, 5000, 5000 y 0; para 11 (c) son 5000, 5000, 5000, 0 y 0, etc.

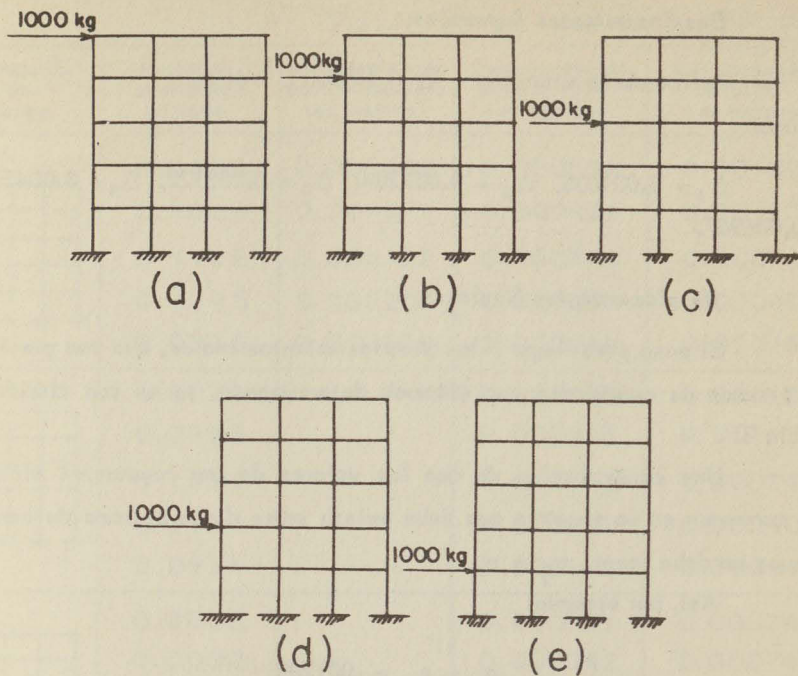


Fig. 11

Las soluciones de los cinco sistemas son:

$A = 0.0936$ ,  $B = 0.1145$ ,  $C = 0.1102$ ,  $D = 0.1009$  y  $E = 0.0853$ ,  
para el caso de la Figura 11 (a).

$A = 0.0935$ ,  $B = 0.1144$ ,  $C = 0.1096$ ,  $D = 0.0905$  y  $E = 0.0071$ ,  
para el caso de la Figura 11 (b).

$A = 0.0934$ ,  $B = 0.1136$ ,  $C = 0.0965$ ,  $D = 0.0092$  y  $E = 0.0002$ ,  
para el caso de la figura 11 (c).

$A = 0.0924$ ,  $B = 0.0988$ ,  $C = 0.0109$ ,  $D = 0.0004$  y  $E = 0.0000$ ,  
para el caso de la Figura 11 (d).

$A = 0.0769$ ,  $B = 0.0111$ ,  $C = 0.0004$ ,  $D = 0.0000$  y  $E = 0.0000$ ,  
para el caso de la Figura 11 (e).

### Desplazamientos Supuestos.

Aplicando la ecuación  $\Delta = 10,000 L^2/6EI$ ,

se obtiene:

$$\Delta_1 = 0.001600, \Delta_2 = 0.002204, \Delta_3 = 0.003122, \Delta_4 = 0.004571 \text{ y} \\ \Delta_5 = 0.006967.$$

### Desplazamientos Reales.

El paso para llegar a los desplazamientos reales, que son precisamente el sistema de cantidades que estamos determinando, se vé con claridad en la Tabla 2.

Una comprobación de que los valores de las constantes elásticas están correctos es la simetría que debe existir entre dicho sistema de constantes, pues se debe tener  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Así, por ejemplo:

$$a_{45} = a_{54} = .001208$$

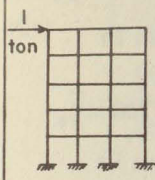
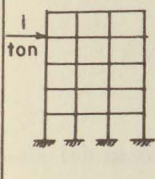
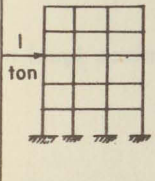
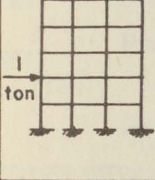
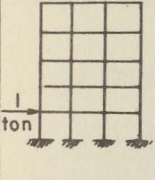
### 3. Ecuaciones del Movimiento.

Determinadas las constantes elásticas, el siguiente paso es establecer el sistema simultáneo de ecuaciones diferenciales que define el movimiento de los cinco pisos:

$$y_1 + .000123 M \ddot{y}_1 + .000148 M \ddot{y}_2 + .000149 M \ddot{y}_3 + .000149 M \ddot{y}_4 + \\ + .000149 M \ddot{y}_5 = K \text{ sen } Ft$$

$$y_2 + .000148 M \ddot{y}_1 + .000366 M \ddot{y}_2 + .000400 M \ddot{y}_3 + .000402 M \ddot{y}_4 + \\ + .000402 M \ddot{y}_5 = K \text{ sen } Ft \quad (12)$$

Tabla 2

Condición de carga	Factor de proporcionalidad	Desplazamiento parcial supuesto (en metros)	Desplazamiento parcial real (en metros)	Desplazamiento total (en metros)
	0.0853	0.006967	0.000594	0.001802
	0.1009	0.004571	0.000461	0.001208
	0.1102	0.003122	0.000344	0.000745
	0.1145	0.002204	0.000252	0.000402
	0.0936	0.001600	0.000149	0.000149
	0.0071		0.000049	0.001208
	0.0905		0.000413	0.001158
	0.1090		0.000342	0.000744
	0.1144		0.000252	0.000402
	0.0935		0.000149	0.000149
	0.0002		0.000001	0.000745
	0.0092		0.000042	0.000744
	0.0965		0.000301	0.000701
	0.1136		0.000250	0.000400
	0.0934		0.000149	0.000149
	0.0000		0.000000	0.000402
	0.0004		0.000001	0.000402
	0.0109		0.000034	0.000400
	0.0988		0.000217	0.000366
	0.0924		0.000147	0.000148
	0.0000		0.000000	0.000149
	0.0000		0.000000	0.000149
	0.0004		0.000001	0.000149
	0.0111		0.000024	0.000148
	0.0769		0.000123	0.000123

$$y_3 + .000149 \ddot{M}y_1 + .000400 \ddot{M}y_2 + .000701 \ddot{M}y_3 + .000744 \ddot{M}y_4 + .000745 \ddot{M}y_5 = K \text{ sen } Ft$$

$$y_4 + .000149 \ddot{M}y_1 + .000402 \ddot{M}y_2 + .000744 \ddot{M}y_3 + .001158 \ddot{M}y_4 + .001208 \ddot{M}y_5 = K \text{ sen } Ft \quad (12)$$

$$y_5 + .000149 \ddot{M}y_1 + .000402 \ddot{M}y_2 + .000745 \ddot{M}y_3 + .001208 \ddot{M}y_4 + .001802 \ddot{M}y_5 = K \text{ sen } Ft$$

En estas ecuaciones  $M = 30/9.81$

#### 4. Solución del Sistema de Ecuaciones.

La solución de este sistema de ecuaciones es: la solución del sistema con segundos miembros igual a cero más la solución particular que dá el segundo miembro.

Una solución particular del sistema con segundos miembros igual a cero es:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos(\omega t + B) \\ y_2 &= A_2 \cos(\omega t + B) \\ y_3 &= A_3 \cos(\omega t + B) \\ y_4 &= A_4 \cos(\omega t + B) \\ y_5 &= A_5 \cos(\omega t + B) \end{aligned} \quad (13)$$

La ecuación de la frecuencia es:

$$\begin{vmatrix} .123 - x & .148 & .149 & .149 & .149 \\ .148 & .366 - x & .400 & .402 & .402 \\ .149 & .400 & .701 - x & .744 & .745 \\ .149 & .402 & .744 & 1.158 - x & 1.208 \\ .149 & .402 & .745 & 1.208 & 1.802 - x \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{donde } x = \frac{9810}{30 \omega^2}$$

Las cinco raíces positivas son:

$$\omega_1 = 9.8779$$

$$\omega_2 = 26.0004$$

$$\omega_3 = 42.6205$$

$$\omega_4 = 60.3515$$

$$\omega_5 = 85.0653$$

donde  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  y  $\omega_5$  son las frecuencias circulares naturales del sistema.

Para cada una de las cinco raíces hay una solución particular del tipo (13).

Estas soluciones deben satisfacer las ecuaciones con segundo miembro cero, por lo tanto sus amplitudes se determinan del sistema de ecuaciones lineal homogéneo siguiente:

$$(.123 - x) A_1 + .148 A_2 + .149 A_3 + .149 A_4 + .149 A_5 = 0$$

$$.148 A_1 + (.366 - x) A_2 + .400 A_3 + .402 A_4 + .402 A_5 = 0$$

$$.149 A_1 + .400 A_2 + (.701 - x) A_3 + .744 A_4 + .745 A_5 = 0$$

$$.149 A_1 + .402 A_2 + .744 A_3 + (1.158 - x) A_4 + 1.208 A_5 = 0$$

$$.149 A_1 + .402 A_2 + .745 A_3 + 1.208 A_4 + (1.802 - x) A_5 = 0$$

$$\text{donde } x = \frac{9810}{30 \omega^2} .$$

La solución de este sistema para  $\omega_1 = 9.8779$  es:

$$A_1 = .13584 A_5$$

$$A_2 = .32620 A_5$$

$$A_3 = .56477 A_5$$

$$A_4 = .81049 A_5$$

$$A_5 = A_5$$

Para  $\omega_2 = 26.0004$

$$A_1 = -.39207 A_5$$

$$A_2 = -.84543 A_5$$

$$A_3 = -.90290 A_5$$

$$A_4 = -.20496 A_5$$

Para  $\omega_3 = 42.6205$

$$A_1 = .98230 A_5$$

$$A_2 = 1.37840 A_5$$

$$A_3 = -.20105 A_5$$

$$A_4 = -1.79894 A_5$$

Para  $\omega_4 = 60.3515$

$$A_1 = -3.86519 A_5$$

$$A_2 = -1.96240 A_5$$

$$A_3 = 5.44609 A_5$$

$$A_4 = -3.64631 A_5$$

Para  $\omega_5 = 85.0653$

$$A_1 = 58.25000 A_5$$

$$A_2 = -46.51076 A_5$$

$$A_3 = 20.78525 A_5$$

$$A_4 = -5.98425 A_5$$

En cada una de estas cinco soluciones sólo hay una amplitud arbitraria.

Se vé que a cada frecuencia natural corresponde una forma de la elástica al vibrar, a la más baja, llamada fundamental, corresponde una forma sin nodos.

Las cinco formas o nodos de vibración se muestran en la Figura 12.

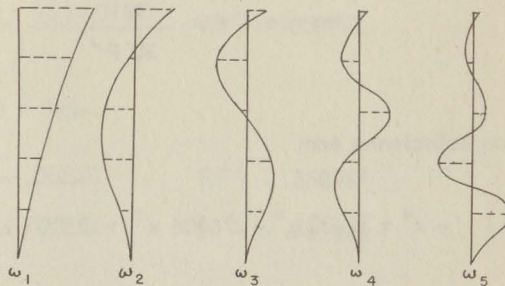


Fig 12

La solución del sistema simultáneo de ecuaciones con segundo miembro cero es la suma de las soluciones particulares correspondientes a cada frecuencia natural; esta suma de soluciones particulares contiene diez constantes arbitrarias, cinco amplitudes y cinco fases.

La solución particular de las ecuaciones (12) debida al segundo miembro ( $K \text{ sen } Ft$ ) es del tipo:

$$y_1 = R \text{ sen } Ft$$

$$y_2 = S \text{ sen } Ft$$

$$y_3 = T \text{ sen } Ft$$

$$y_4 = U \text{ sen } Ft$$

$$y_5 = V \text{ sen } Ft$$

donde  $R, S, T, U$  y  $V$  se determinan del sistema de ecuaciones siguientes:

$$(.123 - x) R + .148 S + .149 T + .149 U + .149 V = - Kx$$

$$.148 R + (.366 - x) S + .400 T + .402 U + .402 V = - Kx$$

$$.149 R + .400 S + (.701 - x) T + .744 U + .745 V = - Kx$$

$$.149 R + .402 S + .744 T + (1.158 - x) U + 1.208 V = - Kx$$

$$.149 R + .402 S + .745 T + 1.208 U + (1.802 - x) V = - Kx$$

$$\text{en que } x = \frac{9810}{30 F^2}$$

Las soluciones son:

$$S = \frac{Kx}{\Delta} ( - x^4 + 2.432 x^3 - .76106 x^2 + .03901 x + .00142 )$$

$$T = \frac{Kx}{\Delta} (-x^4 + 1.411x^3 - .13514x^2 + .01206x - .00013)$$

$$U = \frac{Kx}{\Delta} (-x^4 + 0.489x^3 - .05924x^2 + .00154x + .00000)$$

$$V = \frac{Kx}{\Delta} (-x^4 - .156x^3 - .00755x^2 - .00012x - .00000)$$

donde

$$\Delta = -x^5 + 4.150x^4 - 2.85738x^3 + .62007x^2 - .04876x + .00118$$

Vamos a determinar los valores de R, S, T, U y V correspondientes a distintos períodos de temblor en el intervalo de valores

$$1 \text{ seg.} \leq t_s \leq 3 \text{ seg.}$$

y para una aceleración máxima  $A_m = .35 \text{ m/seg}^2$ , entonces  $KF^2 = .35 \text{ m/seg}^2$ .

Para  $t_s = 1 \text{ seg.}$

$$R = .01006 M. \quad RF^2 = .397210 \text{ M/seg.}^2$$

$$S = .01178 \quad SF^2 = .465247$$

$$T = .01366 \quad TF^2 = .539487$$

$$U = .01544 \quad UF^2 = .609842$$

$$V = .01674 \quad VF^2 = .660991$$

Para  $t_s = 2 \text{ seg.}$

$$R = .03630 \quad RF^2 = .358281$$

$$S = .03748 \quad SF^2 = .369930$$

$$\begin{array}{ll}
 T = .03870 & TF^2 = .381997 \\
 U = .03982 & UF^2 = .393038 \\
 V = .04061 & VF^2 = .400819
 \end{array}$$

Para  $t_s = 3$  seg.

$$\begin{array}{ll}
 R = .08058 & RF^2 = .35349 \\
 S = .08170 & SF^2 = .35839 \\
 T = .08285 & TF^2 = .36342 \\
 U = .08389 & UF^2 = .36799 \\
 V = .08462 & VF^2 = .37120
 \end{array}$$

Las aceleraciones mayores se obtienen para  $t_s = 1$  seg. por lo tanto vamos a utilizar los datos correspondientes a ese período y la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned}
 y_1 = & .13584 C_1 \cos(9.8779 t + B_1) - .39207 C_2 \cos(26.0004 t + B_2) \\
 & + .98230 C_3 \cos(42.6205 t + B_3) - 3.86519 C_4 \cos(60.3515 t + B_4) \\
 & + 58.250 C_5 \cos(85.0653 t + B_5) + .01006 \operatorname{sen} 6.2832 t.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2 = & .32620 C_1 \cos(9.8779 t + B_1) - .84543 C_2 \cos(26.0004 t + B_2) \\
 & + 1.3784 C_3 \cos(42.6205 t + B_3) - 1.9624 C_4 \cos(60.3515 t + B_4) \\
 & - 46.51076 C_5 \cos(85.0653 t + B_5) + .01178 \operatorname{sen} 6.2832 t.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_3 = & .56477 C_1 \cos(9.8779 t + B_1) - .9029 C_2 \cos(26.0004 t + B_2) \\
 & - .20105 C_3 \cos(42.6205 t + B_3) + 5.44609 C_4 \cos(60.3515 t + B_4) \\
 & + 20.78525 C_5 \cos(85.0653 t + B_5) + .01366 \operatorname{sen} 6.2832 t.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_4 = & .81049 C_1 \cos ( 9.8779 t + B_1 ) - .20496 C_2 \cos (26.0004t + B_2) \\
 & - 1.79894 C_3 \cos (42.6205 t + B_3) - 3.64631 C_4 \cos (60.3515t + B_4) \\
 & - 5.98425 C_5 \cos (85.0653 t + B_5) + .01544 \operatorname{sen} 6.2832 t .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_5 & + C_1 \cos ( 9.8779 t + B_1 ) + C_2 \cos (26.0004 t + B_2) \\
 & + C_3 \cos (42.6205 t + B_3) + C_4 \cos (60.3515 t + B_4) \\
 & + C_5 \cos (85.0653 t + B_5) + .01674 \operatorname{sen} 6.2832 t .
 \end{aligned}$$

Esta solución tiene las constantes arbitrarias necesarias para ser solución general.

#### 5.- Determinación de las Constantes Arbitrarias

$$\text{Para } t = 0, y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 0 ,$$

con esta condición se obtiene el valor de las fases:

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = - \pi/2 ,$$

es decir, la solución es suma de senos, ya que

$$\cos (\omega t - \pi/2) = \operatorname{sen} \omega t$$

$$\text{Para } t = 0, \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dot{y}_3 = \dot{y}_4 = \dot{y}_5 = \dot{y}_5 = KF .$$

Con esta condición se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que dá los valores de las amplitudes de las vibraciones libres:

$$\begin{aligned}
 & + .13584 C_1' - .39207 C_2' + .98230 C_3' - 3.86518 C_4' + 58.25 C_5' = \\
 & = - .00751
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
.32620 C'_1 - .84543 C'_2 + 1.37846 C'_3 - 1.95248 C'_4 - 46.5107 C'_5 &= -.01834 \\
.56477 C'_1 - .9029 C'_2 - .20105 C'_3 + 5.4460 C'_4 + 20.7852 C'_5 &= -.03015 \\
.81049 C'_1 + .20496 C'_2 - 1.79894 C'_3 - 3.64631 C'_4 - 5.9842 C'_5 &= -.04135 \\
C'_1 + C'_2 + C'_3 + C'_4 + C'_5 &= -.04949
\end{aligned}$$

En este sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
C'_1 &= 9.87795 C_1 \\
C'_2 &= 26.00047 C_2 \\
C'_3 &= 42.62052 C_3 \\
C'_4 &= 60.35158 C_4 \\
C'_5 &= 85.06535 C_5
\end{aligned}$$

Sustituídos los valores de  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, B_1, B_2, B_3, B_4$  y  $B_5$  en la solución general, se obtiene la solución final:

$$\begin{aligned}
\psi_1 = & -.0007073 \operatorname{sen} 9.8779 t - .00002435 \operatorname{sen} 26.0004 t - \\
& -.00000360 \operatorname{sen} 42.6205 t + .00000020 \operatorname{sen} 60.3515 t + \\
& +.00000214 \operatorname{sen} 85.0653 t + .01006140 \operatorname{sen} 6.2832 t .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2 = & -.00168272 \operatorname{sen} 9.8779 t - .00005253 \operatorname{sen} 26.0004 t - \\
& -.00000505 \operatorname{sen} 42.6205 t + .00000011 \operatorname{sen} 60.3515 t - \\
& -.00000171 \operatorname{sen} 85.0653 t + .01178479 \operatorname{sen} 6.2832 t .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 = & -.00291334 \operatorname{sen} 9.8779 t - .00005610 \operatorname{sen} 26.0004 t + \\
& +.00000074 \operatorname{sen} 42.6205 t - .00000029 \operatorname{sen} 60.3515 t + \\
& +.00000076 \operatorname{sen} 85.0653 t + .01366531 \operatorname{sen} 6.2832 t .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_4 = & - .00418086 \text{ sen } 9.8779 t - .00001273 \text{ sen } 26.0004 t + \\
 & + .00000660 \text{ sen } 42.6205 t + .00000020 \text{ sen } 60.3515 t + \\
 & - .00000022 \text{ sen } 85.0653 t + .01544742 \text{ sen } 6.2832 t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_5 = & - .0051841 \text{ sen } 9.8779 t + .00006213 \text{ sen } 26.0004 t - \\
 & - .00000367 \text{ sen } 42.6205 t - .00000005 \text{ sen } 60.3515 t - \\
 & + .00000004 \text{ sen } 85.0653 t + .01674301 \text{ sen } 6.2832 t
 \end{aligned}$$

### 6. Comparación de los Períodos Naturales con los Sísmicos

En nuestro caso los límites entre los cuales se encuentran los períodos de la vibración forzada están alejados de los períodos naturales.

A continuación se da la comparación entre los períodos naturales y los períodos sísmicos.

Los períodos naturales se determinan con la fórmula:

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

donde  $t_0$  = período natural y  $\omega$  = frecuencia natural circular.

Períodos naturales:

$$t_{0_1} = 0.64 \text{ seg. (período fundamental)}$$

$$t_{0_2} = 0.24 \text{ seg.}$$

$$t_{0_3} = 0.15 \text{ seg.}$$

$$t_{0_4} = 0.10 \text{ seg.}$$

$$t_{0_5} = 0.07 \text{ seg.}$$

Períodos sísmicos considerados:

1 seg, 2 seg, y 3 seg.

Cuando un período natural tiene valor próximo a los de los períodos sísmicos hay peligro de resonancia, entonces hay que cambiar la geometría de la estructura para cambiar las constantes elásticas y la masa del sistema cambiando, a su vez con ello, los períodos naturales.

### 7. Aceleraciones para Proyecto

Los valores de las aceleraciones de los cinco pisos en función del tiempo son:

$$\ddot{y}_1 = .06837 \text{ sen } 9.8779 t + .01646 \text{ sen } 26.0004 t + \\ .00654 \text{ sen } 42.6205 t - .00076 \text{ sen } 60.3515 t - \\ - .01550 \text{ sen } 85.0653 t - .39721 \text{ sen } 6.2832 t .$$

$$\ddot{y}_2 = .16418 \text{ sen } 9.8779 t + .03550 \text{ sen } 26.0004 t + \\ + .00918 \text{ sen } 42.6205 t - .00038 \text{ sen } 60.3515 t + \\ + .01238 \text{ sen } 85.0653 t - .46524 \text{ sen } 6.2832 t .$$

$$\ddot{y}_3 = .28426 \text{ sen } 9.8779 t + .03792 \text{ sen } 26.0004 t - \\ - .00133 \text{ sen } 42.6205 t + .00107 \text{ sen } 60.3515 t - \\ - .00553 \text{ sen } 85.0653 t - .53948 \text{ sen } 6.2832 t .$$

$$\ddot{y}_4 = .40794 \text{ sen } 9.8779 t + .00860 \text{ sen } 26.0004 t - \\ - .01198 \text{ sen } 42.6205 t - .00072 \text{ sen } 60.3515 t + \\ + .00159 \text{ sen } 85.0653 t - .60984 \text{ sen } 6.2832 t .$$

$$\ddot{y}_5 = .50332 \text{ sen } 9.8779 t - .04200 \text{ sen } 26.0004 t + \\ + .00666 \text{ sen } 42.6205 t + .00019 \text{ sen } 60.3515 t - \\ - .00026 \text{ sen } 85.0653 t - .66099 \text{ sen } 6.2832 t .$$

De esta solución se ve que los términos de más peso son el debido a la vibración forzada, de frecuencia igual al temblor, y el que corresponde a la frecuencia fundamental; los otros términos son prácticamente despreciables.

Desde que se determinaron los valores de las aceleraciones de vibración forzada, se escogió el período  $t_s = 1 \text{ seg.}$ , para hacer el análisis por dar las aceleraciones de vibración forzada mayores; además, por la forma como se determinaron las constantes arbitrarias que dan las aceleraciones de vibración libre se vé que también son las mayores para  $t_s = 1 \text{ seg.}$

Las aceleraciones máximas son iguales a la suma de los valores absolutos de las máximas aceleraciones de todos los términos de la solución.

Por lo tanto, las aceleraciones para proyecto son las siguientes:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= .46 \text{ m/seg}^2 , \\ \ddot{y}_2 &= .68 \text{ " } , \\ \ddot{y}_3 &= .86 \text{ " } , \\ \ddot{y}_4 &= 1.04 \text{ " } , \\ \ddot{y}_5 &= 1.20 \text{ " } , \end{aligned}$$

### 8. Determinación de los Momentos Flexionantes

En las Figuras 5 (b), 6 (b), 7 (b), 8 (b) y 9 (b) se tienen diagramas de momentos para desplazamientos supuestos en cada uno de los cinco pisos; en la Tabla 2 se tienen los factores por los que hay que multiplicar los momentos de esos diagramas para obtener los diagramas de momentos originados por una

fuerza unitaria aplicada en cada uno de los cinco pisos aisladamente. Los momentos flexionantes correspondientes a las fuerzas sísmicas máximas se obtienen fácilmente multiplicando por la magnitud de dichas fuerzas los momentos correspondientes a fuerzas unitarias.

Los factores para obtener el diagrama de la condición real directamente a partir de los diagramas de momentos de las Figuras 5 (b), 6 (b), 7 (b), 8 (b) y 9 (b), se obtienen sumando los factores de las condiciones 13 (f), 13 (g), 13 (h), 13 (i) y 13 (j), que multiplican al mismo diagrama de momentos de los cinco que se tienen para desplazamientos supuestos.

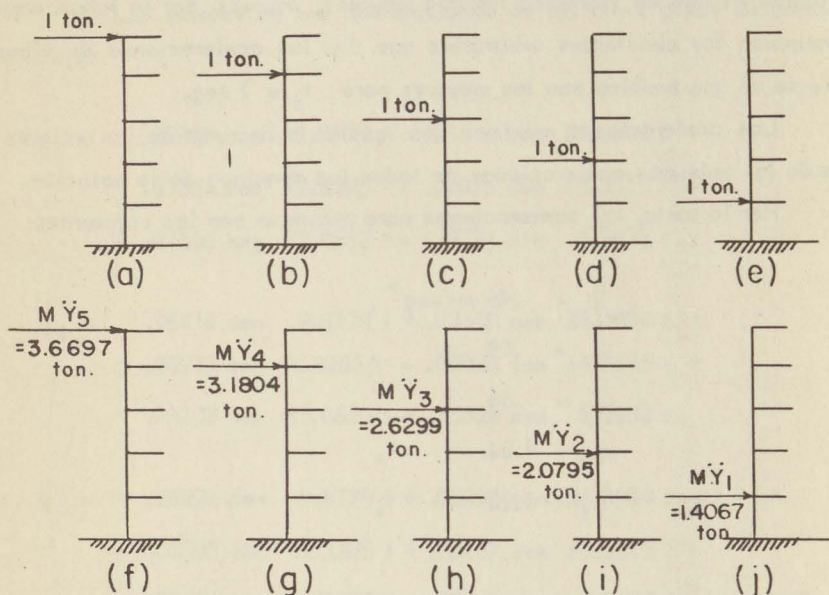


Fig 13

Los factores son:

$$f_1 = 1.1868, f_2 = 1.3038, f_3 = 1.0299, f_4 = .6831 \text{ y } f_5 = .3361$$

que multiplican respectivamente a los diagramas de momentos de las Figuras 5 (b), 6 (b), 7 (b), 8 (b) y 9 (b).

La suma de los cinco diagramas, obtenidos multiplicando los diagramas de las Figuras 5 (b), 6 (b), 7 (b), 8 (b) y 9 (b) por su respectivo factor, es el diagrama final, el cual se muestra en la Figura 14 (a).

La Figura 14 (b) muestra el diagrama que se obtiene considerando la solución estática de suponer una aceleración igual a  $35 \text{ cm/seg}^2$  en todos los pisos.

Se hace notar que debido al carácter vibratorio del movimiento el signo de los momentos es variable.

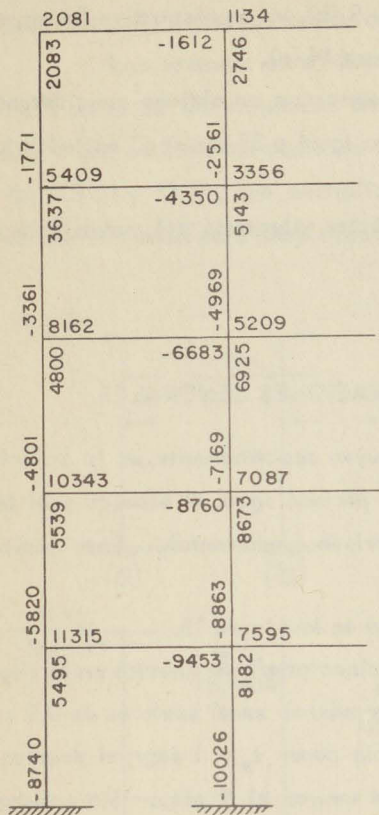
## XI. CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES GENERALES

Los únicos términos que contribuyen prácticamente en la solución son dos: el término de vibración forzada, de período igual al sísmico y el término de vibración libre correspondiente al período fundamental. Esto implica que la estructura vibra sin nodos.

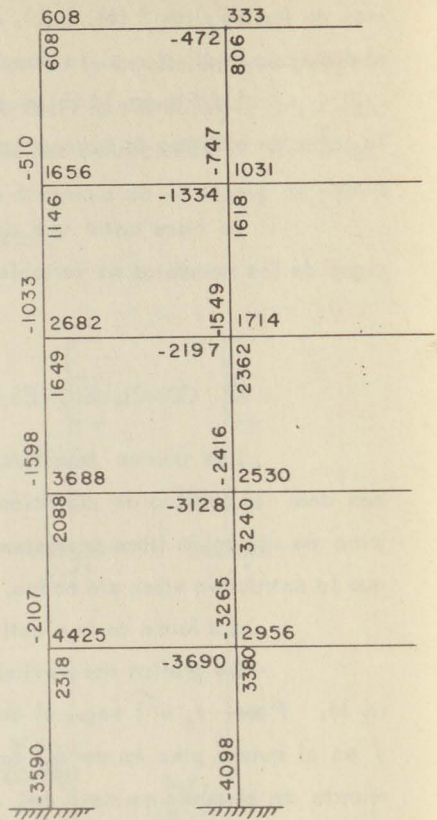
La forma de la elástica se muestra en la Figura 15.

La gráfica del movimiento de los cinco pisos se muestra en la Figura 16. Para  $t_s = 1 \text{ seg.}$ , el desplazamiento máximo en el suelo es de 0.9 cm., y en el quinto piso es de 2.2 cm. En cambio para  $t_s = 1 \text{ seg.}$ , el desplazamiento en el suelo es de 8 cm., siendo de 8.4 cm., en el 5º piso. Sin embargo, la solución para  $t_s = 1 \text{ seg.}$ , da aceleraciones bastante mayores que las correspondientes al caso  $t_s = 3 \text{ seg.}$ , lo cual se muestra en la Figura 17. Por lo tanto, si se toma la misma máxima aceleración sísmica, un movimiento sísmico de amplitud grande (8 cm.), produce un efecto menor que un sismo de amplitud pequeña (.9 cm.), pero con período bajo (1 seg.), y cercano al período natural fundamental de la estructura (.64 seg.).

En el caso en que la estructura se mueve rígidamente se tiene una aceleración igual a la sísmica en todos los pisos, en nuestro caso la acelera-



(a)



(b)

Fig. 14 DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES  
 La figura (a) es la solución dinámica con período sísmico igual a 1 seg. y aceleración sísmica igual a  $35 \text{ cm/seg}^2$ , la figura (b) es la solución estática de suponer una aceleración igual a  $35 \text{ cm/seg}^2$  en todos los pisos

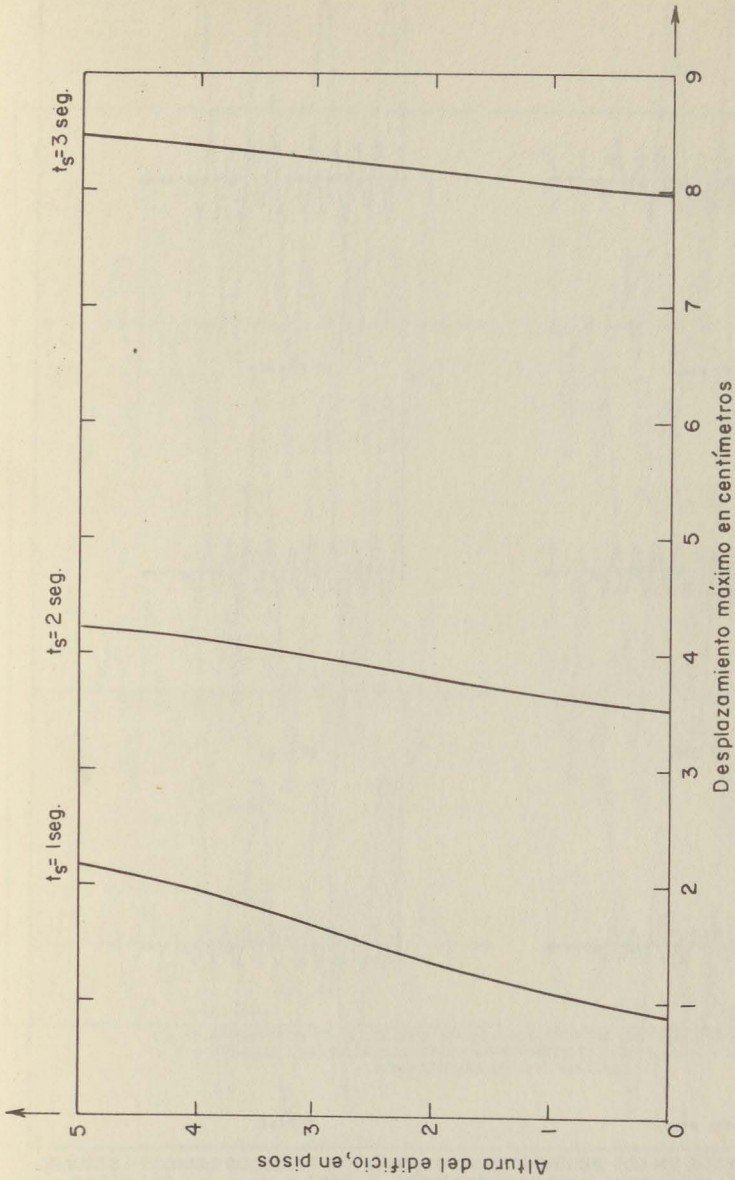


Fig. 15 EL DESPLAZAMIENTO MÁXIMO COMO FUNCIÓN DE LA ALTURA DEL EDIFICIO PARA LOS CASOS DE LOS PERIODOS SISMICOS 1seg., 2seg. y 3seg.

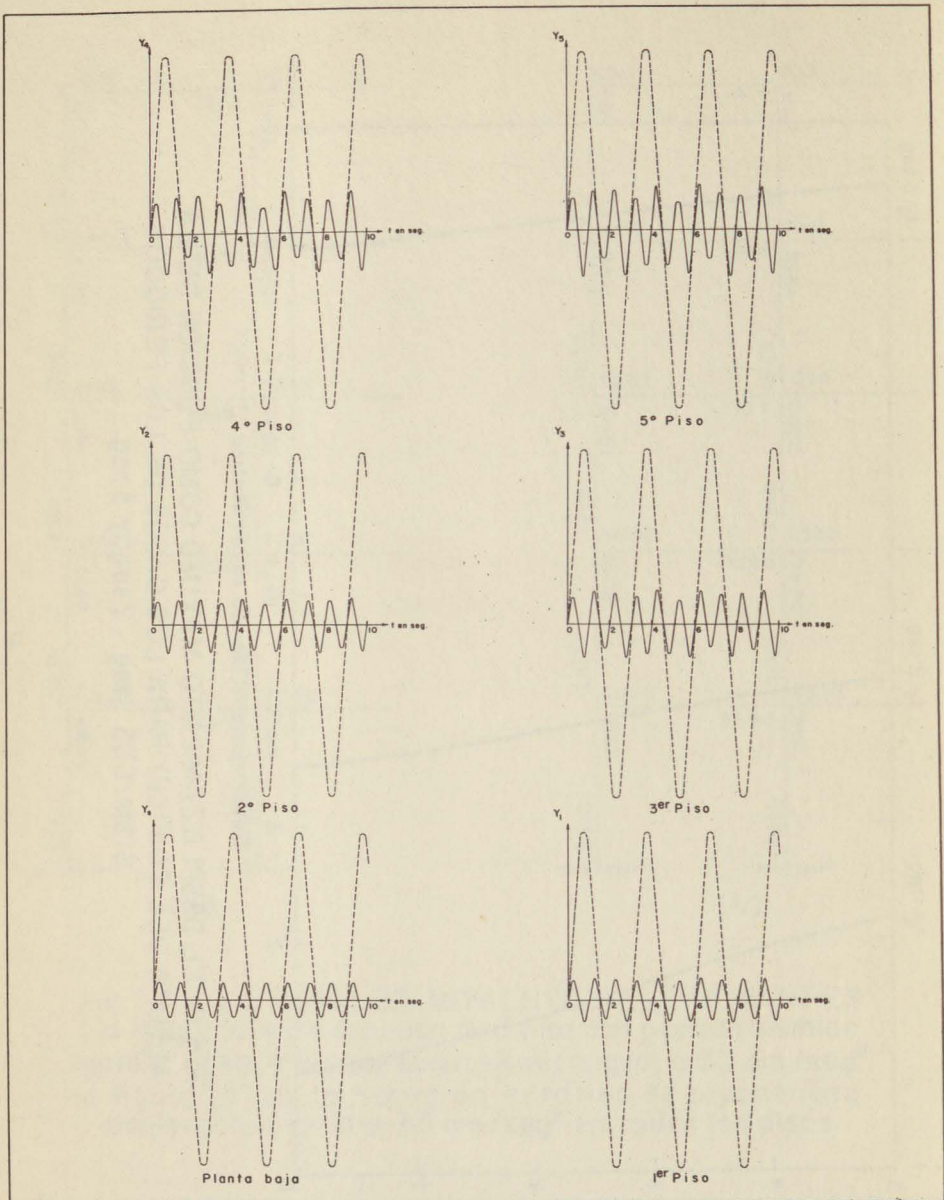


Fig. 16 DESPLAZAMIENTOS EN LOS DIFERENTES PISOS, PARA LOS PERIODOS SISMICOS 1 SEGUNDO Y 3 SEGUNDOS. LAS LINEAS CONTINUAS CORRESPONDEN AL CASO  $t_s=1$  seg., Y LAS LINEAS DISCONTINUAS AL CASO  $t_s=3$  seg.

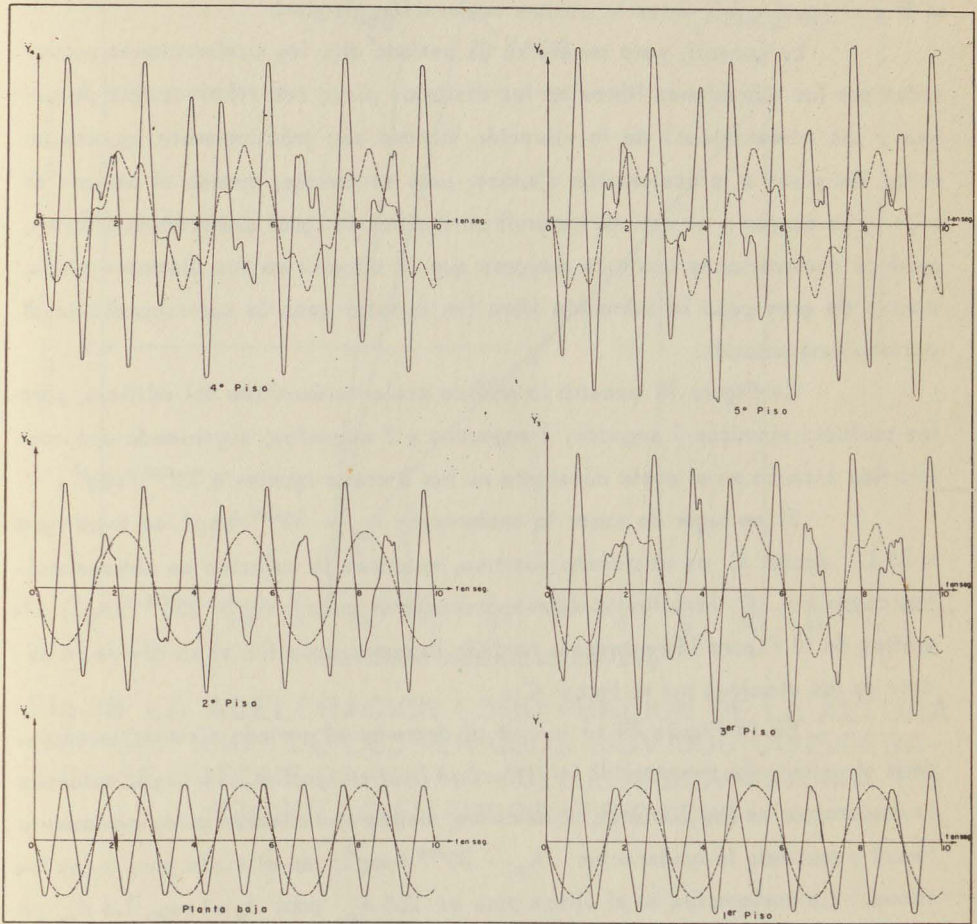


Fig. 17 ACCELERACIONES EN LOS DIFERENTES PISOS, PARA LOS PERIODOS SISMICOS 1 SEGUNDO Y 3 SEGUNDOS. LAS LINEAS CONTINUAS CORRESPONDEN AL CASO  $t_s = 1$  seg., Y LAS LINEAS DISCONTINUAS AL CASO  $t_s = 3$  seg.

ción sísmica máxima es igual a  $35^{cm}/seg^2$ .

En cambio nuestro análisis da aceleraciones 3.4 veces mayores que la sísmica en el 5º piso, 2.9 veces en el cuarto, 2.4 en el 3º, 1.9 en el 2º y 1.3 en el 1º. Estas aceleraciones se obtienen para un período  $t_s = 1$  seg., mientras que para un período  $t_s = 3$  seg., se obtiene una aceleración máxima en el 5º piso igual a 1.3 veces la máxima aceleración sísmica.

En general, para temblores de período alto las aceleraciones producidas por las vibraciones libres en los distintos pisos son relativamente pequeñas y las aceleraciones de la vibración forzada son prácticamente iguales en todos los pisos a la aceleración sísmica, pero en cambio, cuando el período es bajo (y se acerca a un período natural) un temblor de igual aceleración sísmica, produce aceleraciones bastante mayores que la sísmica en los distintos pisos, siendo de gran peso la vibración libre (en nuestro caso la correspondiente al período fundamental).

La Figura 18 muestra la gráfica aceleración-altura del edificio, para los períodos sísmicos 1 segundo, 2 segundos y 3 segundos, suponiendo una aceleración sísmica en el suelo constante en los 3 casos iguales a  $35^{cm}/seg^2$ .

Si en lugar de tomar la aceleración  $A_m = 35^{cm}/seg^2$ , se toma igual a  $35 C$ , donde  $C$  es un número positivo, entonces la solución se obtiene multiplicando por  $C$  la solución correspondiente al caso  $A_m = 35^{cm}/seg^2$ ; y la gráfica de la Figura 18 representa también la nueva solución si se divide la escala de las abscisas por el factor  $C$ .

En la Figura 18 se ve que al decrecer el período sísmico, acercándose al período fundamental de la estructura (que es igual a 0.64 seg.), entonces la aceleración en los distintos pisos crece, siendo su variación aproximadamente lineal y teniendo la aceleración  $A_m = 35^{cm}/seg^2$ , en el suelo para todos los casos. La aceleración en el último piso es  $3.4 A_m$  para  $t_s = 1$  seg.,  $1.6 A_m$  para  $t_s = 2$  seg., y  $1.3 A_m$  para  $t_s = 3$  seg.

Se concluye pues, que para cierto tipo de estructuras una distribución trapezoidal para fuerzas laterales es una buena aproximación, pero queda

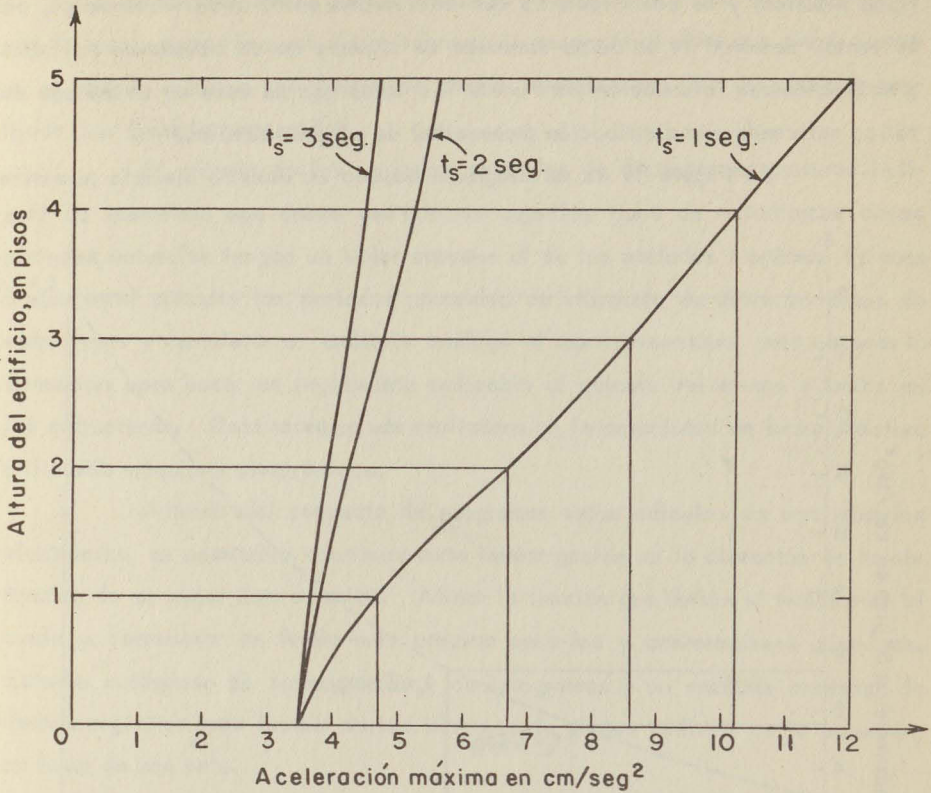


Fig. 18 LA ACELERACION COMO FUNCION DE LA ALTURA DEL EDIFICIO Y DE LOS PERIODOS SISMICOS CONSIDERADOS. SE SUPONE LA MISMA ACELERACION MAXIMA EN EL SUELO EN TODOS LOS CASOS

por definir cuanto debe valer la aceleración en el último piso, lo cual depende de la razón  $t_0/t_s$  (donde  $t_0$  es el período natural fundamental y  $t_s$  el período sísmico) y de otros factores que intervienen en el análisis dinámico, por lo tanto, mediante la solución dinámica de algunos casos típicos de edificios podrá obtenerse información para basar los datos que se usen en un método estático aplicando una distribución trapezoidal de cargas laterales.

La Figura 19 es un diagrama basado en nuestro ejemplo numérico,

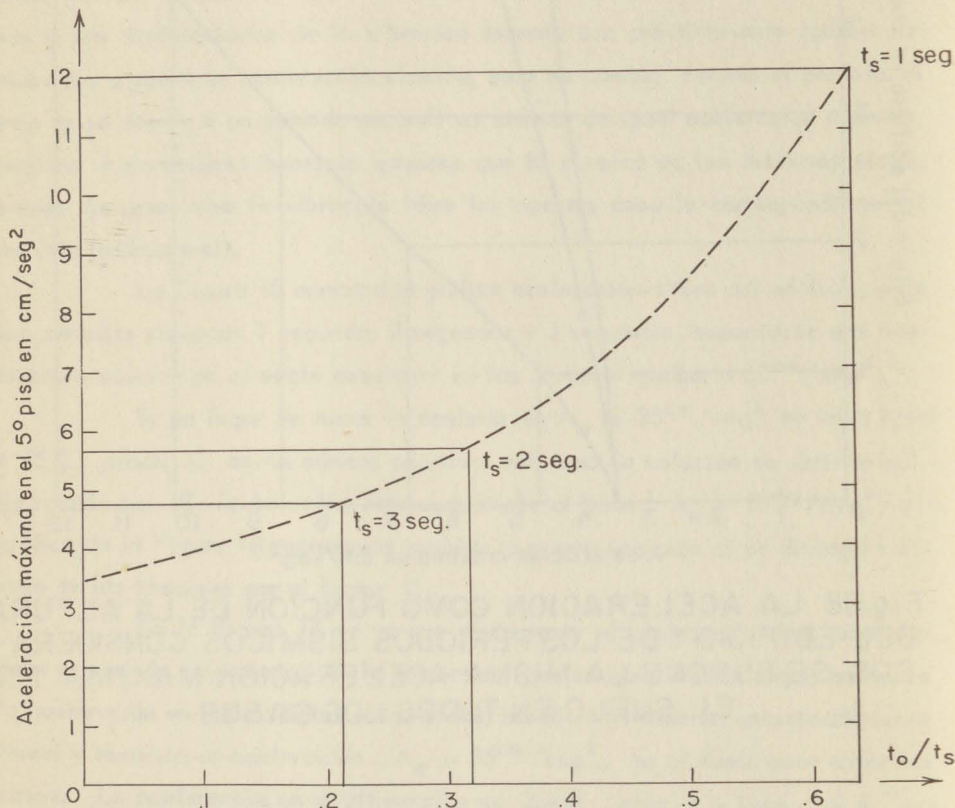


Fig. 19 LA ACCELERACION EN EL ULTIMO PISO COMO FUNCION DE  $t_0/t_s$ , DONDE  $t_0$  ES EL PERIODO NATURAL FUNDAMENTAL Y  $t_s$  EL PERIODO SISMICO ( $t_0=0.64$  seg.;  $1 \text{ seg.} \leq t_s \leq 3 \text{ seg.}$ )

mostrando la aceleración en el último piso como función de la razón  $t_0/t_s$ . Gráficas análogas a ésta, pero en las que se haga intervenir, además de  $t_0/t_s$  y  $A_m$ , otros parámetros, pueden construirse utilizando datos de distintos tipos de estructuras, lo cual daría información respecto al dato que debe usarse en el método estático aproximado de cargas laterales con una distribución prefijada (por ejemplo trapezoidal).

El cálculo de los períodos naturales de distintas estructuras indicará de inmediato que deben desecharse aquellos tipos de estructuras cuyos períodos naturales tengan un valor cercano al de los períodos sísmicos. Es pues fundamental calcular los períodos naturales de vibración de distintos tipos de estructuras y completar un análisis análogo al aquí presentado, para obtener información para hacer un reglamento aplicable al cálculo del efecto sísmico en las estructuras. Esta tarea puede realizarse en la actualidad en forma práctica utilizando máquinas electrónicas.

Además del proyecto de programar estos cálculos en una máquina electrónica, es necesario continuar esta investigación en la dirección de la obtención de un mejor dato sísmico. Afinar la función que define el temblor en el suelo y determinar en forma más precisa períodos y aceleraciones sísmicas. Estudio cuidadoso de sismogramas y acelerogramas y un análisis armónico de dichos registros para incluir varios términos de dichos análisis en la solución, en lugar de uno solo.

#### AGRADECIMIENTO

Este estudio en su forma inicial de tesis para Ingeniero Civil fue sugerido por el Ing. Alberto J. Flores, quien, además, le brindó al autor el beneficio de numerosas discusiones.